CAPITOLO 5:
TEORIA DELL'AFFIDABILITÀ E VALUTAZIONE DEI RISCHI INDUSTRIALI

5.1 INTRODUZIONE E CENNI STORICI

Il complesso degli argomenti che vengono raggruppati nel linguaggio corrente sotto il nome di "**teoria dell'affidabilità**" comprende un **insieme di teorie e metodi matematici e statistici**, di **metodi organizzativi** e di **pratiche operative** che, attraverso lo **studio delle leggi di occorrenza dei guasti**, sono volti alla **soluzione di problemi di previsione, stima, ottimizzazione delle probabilità di sopravvivenza, durata media di vita, percentuale di tempo di buon funzionamento di un sistema**
L'affidabilità, con i concetti in essa contenuti, sta acquistando una **notevole importanza** nelle **attività produttive** dell'uomo e tale caratteristica è maggiormente evidenziata nei **paesi tecnologicamente e scientificamente progrediti**. Per misurare meglio e comprendere il perché, della sua importanza, si ripercorrono le **tappe storiche** che hanno evidenziato la sua insostituibilità nella soluzione di molti problemi e come abbia via via interessato i **vari settori industriali**.
Quando tra la prima e la seconda guerra mondiale comparvero i **primi aerei a più motori** ci si chiese qual era la **possibilità di successo** di una missione per i diversi sistemi di propulsione. Naturalmente tale probabilità **non era quantizzata**, non essendo ancora ben definito il concetto di affidabilità però conteneva già il **concetto** di **probabilità di sopravvivenza per un certo periodo di tempo**.
Con l'espandersi **dell'aviazione anche nel campo civile**, il problema sicurezza di funzionamento per un certo periodo di tempo portò necessariamente alla **raccolta e all'analisi dei guasti che si verificavano**, tanto che, già nel 1930, si avevano a disposizione i primi **valori numerici dei tassi di guasto degli aerei** (considerati globalmente), i quali, come si vedrà nel seguito, permettono il **calcolo dell'affidabilità**.
Una tappa significativa nello sviluppo dell'affidabilità si ebbe quando in **Germania** si lavorò alla realizzazione dei **missile V1**: il gruppo Von Braun, malgrado tutte le attenzioni poste

nella selezione dei componenti, non riusciva a farlo funzionare perché, ad ogni prova alcuni di essi si guastavano. **Von Braun riteneva erroneamente** che, in una catena di componenti il cui buon funzionamento era essenziale per il corretto funzionamento del sistema complesso, le probabilità di insuccesso del sistema stesso dipendessero esclusivamente dal cattivo funzionamento dell'anello più debole. Sorse quindi il problema di valutare che **relazione** vi era tra **affidabilità dei componenti** ed **affidabilità del sistema missile**. Riuscì nell'intento Erich Pieruschka, un matematico del gruppo che diede vita alla formula di **affidabilità per sistemi serie**, nota quella dei componenti e permise di stabilire che l'affidabilità del sistema era sempre e comunque più bassa di quella dei singoli componenti. Come conseguenza di questa constatazione, furono **progettati e costruiti nuovi componenti** ed il V1 arrivò ad un'affidabilità del 75%. **L'America** si è occupata di affidabilità già dal tempo della **seconda guerra mondiale** per particolari problemi riguardanti il **settore militare**. Ad esempio pare che il tempo medio di buon funzionamento dei sistemi elettronici di cui erano equipaggiati i bombardieri Usa fosse di sole 20 ore. Già durante la **guerra di Corea**, si decise di applicare le **tecniche di affidabilità** per i **sistemi elettronici**, dato che i **guasti** che vi si verificavano provocavano **enormi inconvenienti**; questa decisione si era tesa necessaria anche per il fatto che le **spese annue di riparazione superavano** di molto il **valore dell'apparato elettronico** stesso. Le necessità intrinseche ad uno stato di guerra quasi continuativo hanno fatto sì che in America la parola affidabilità divenisse col tempo sempre più familiare e che si formasse un **organico di specialisti ogni anno più numeroso e qualificato**. Ciò spiega il **successo** ottenuto in questo paese nel **campo aereo-spaziale** dove è richiesto un elevato valore di affidabilità e l'enorme **balzo in avanti compiuto nel settore elettronico nucleare**. Appare chiaro come **l'industria americana**, che a diversi livelli ha contribuito alla realizzazione di tali successi, si sia dovuta **aggiornare all'esigenza di garantire i propri prodotti** e di conseguenza abbia trovato **nell'affidabilità lo strumento unico** e più adatto **per qualificarsi** e per trovare nuovi sistemi di produzione che tengano conto anche dei costi.

Lo sviluppo di **conoscenze e competenze** in campo affidabilistico, trainata da settori di frontiera come quello militare, aerospaziale e nucleare ha avuto quindi **ripercussioni** anche sui. I **principali motivi** che spingono in generale **l'industria** ad **utilizzare le tecniche dell'affidabilità:**

1. I **prodotti moderni tendono a crescere in complessità**. Si ricordi che l'affidabilità prese avvio proprio dalla constatazione che, al **crescere della complessità**, **crescono**

a tal punto le **probabilità di guasto**, che spesso è impossibile far funzionare ciò che si è progettato con la massima precisione;

2. esigenza di **ridurre il peso ed il volume dei prodotti**, a **parità di sicurezza di funzionamento**. Deve esistere una specie di equilibrio tra questi tre fattori: molto spesso **non è possibile sovradimensionare** i componenti di una macchina, per ottenere una **maggiore affidabilità**, quando questo comporta un eccessivo aumento di pesi e di volumi;
3. esigenza di **aumentare la durata di funzionamento** di un prodotto;
4. esigenza, per i **beni di largo consumo**, contraria alla precedente, e cioè di **accorciare la vita utile tecnico-economica** del prodotto al fine di raggiungere, attraverso **un'espansione dei consumi**, il massimo profitto derivante all'imprenditore dall'associazione ottimale dei valori assunti dai due fattori: **prezzo di vendita, durata del prodotto**. Tipico esempio è la diminuzione della **durata media di vita di un'automobile** o di un elettrodomestico registratasi negli ultimi 20 anni;
5. **Difficoltà di manutenzione**. Una maggiore durata di funzionamento equivale ad una **maggior utilizzazione** dei prodotto con i vantaggi gi economici relativi; difficoltà di manutenzione si può trovare nelle **parti meno accessibili** di una **macchina**, tali parti richiedono quindi un certo valore di affidabilità. Come **caso limite** pensiamo alla particolare situazione in cui si trova un **satellite**: deve svolgere svariate attività per lungo tempo, senza la possibilità di riparazioni e manutenzione;
6. tendenza ad un più largo impiego di **componenti elettronici**. Nel campo elettronico si fa un largo uso della affidabilità, sia perché, i **sistemi elettronici tendono ad aumentare in complessità**, sia perché, i **componenti sono altamente standardizzati**, per cui è facile **reperire dati sul loro funzionamento**;
7. esigenza di **eliminare il rischio di perdite umane** o, in genere di **perdite rilevanti**;
8. La fama di **affidabilità qualifica un produttore** laddove l'affidabilità è indispensabile e gli permette di **conquistare il mercato**.

L'affidabilità costa: **all'aumentare del grado di affidabilità** occorrono **studi** più accurati, **progettazioni** più impegnative, **sperimentazioni** più severe, **costruzioni** più attente e con **l'uso** di **mezzi tecnologicamente più progrediti** ecc.; tutto questo comporta un **aumento dei costi inerenti a queste voci**, che verranno indicati come "**costi di produzione".** Per contro all'aumentare del grado di affidabilità **diminuiranno** i **costi inerenti ai guasti** che vengono indicati come "**costi di manutenzione**" e che riguardano, oltre la **manutenzione**, i **ricambi**, gli oneri derivanti dalla **mancata**

produzione ecc. Il **costo dell'affidabilità** è la **somma dei due costi esaminati**: tale somma avrà un **minimo** a cui corrisponderà un certo valore ottimale di affidabilità, come riportato in Figura 1.

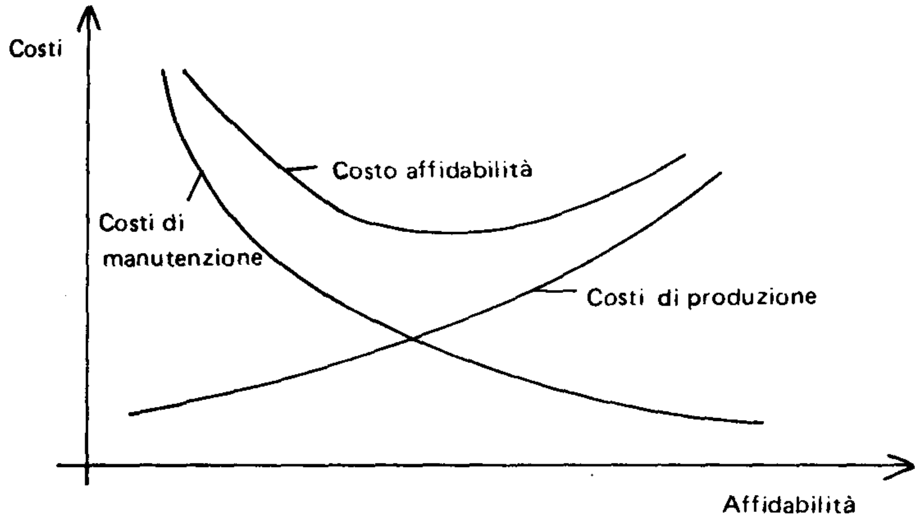

Figura 1: Il costo dell'affidabilità

La **possibilità di applicare le tecniche di affidabilità** è in diretta relazione col problema della **formazione dei tecnici**, e con la **disponibilità di dati** sufficienti relativi ai **guasti della componentistica**. Nel **campo industriale**, le **industrie elettriche ed elettroniche** sono quelle che maggiormente preparano tecnici ed utilizzano metodi di affidabilità. Tale situazione è dovuta probabilmente alla **disponibilità di dati sufficienti** per eseguire calcoli di affidabilità.

5.2 DEFINIZIONI DI AFFIDABILITÀ DI UN COMPONENTE

Dopo aver introdotto il concetto di affidabilità, se ne dà ora una **definizione rigorosa** che permetta di **applicare modelli matematico statistici** nella risoluzione di problemi inerenti l'affidabilità di **singoli elementi** e **sistemi complessi.**

L'affidabilità di un elemento è definita come la **probabilità** che **l'elemento funzioni senza guastarsi** per un **certo tempo t** ed in **predeterminate condizioni ambientali**.

All'elemento preso in considerazione si possono assegnare **due stati,** che lo caratterizzano in ogni istante della sua vita: **uno di buon funzionamento**, **l'altro di cattivo funzionamento**; a tale elemento si può associare dunque la **probabilità di verificarsi dell'uno e dell'altro dei due stati**.

La definizione data di affidabilità presuppone:

- che sia **fissato in modo univoco** il **criterio** per giudicare se **l'elemento è funzionante o viceversa non funzionante**; a volte tale criterio è del tutto ovvio e la definizione di stato "non funzionante" è immediata: ad esempio una saldatura tiene o non tiene; un condensatore è in corto circuito o no, ecc.; si parla allora di **sistemi bistabili**; altre volte lo **stato di guasto** è definibile solo con **l'individuazione di un limite ammissibile** nelle prestazioni dell'apparecchiatura in esame, **oltre il quale limite si parla di guasto** (es. motore di automobile, intensità luminosa di una sorgente, organi di tenuta di una valvola, ecc.); in questi casi è possibile individuare anche degli **stati intermedi** tra quello di buon funzionamento e quello di guasto, coincidendo con altrettanti livelli di prestazioni funzionali;
- che siano stabilite esattamente le **condizioni ambientali e di impiego**, e che esse si **mantengano costanti** nel periodo di tempo in questione;
- che sia **definito l'intervallo di tempo t** durante il quale si **richiede che l'elemento funzioni**.

Fissate le prime due condizioni, **l'affidabilità** di un elemento è solo **funzione del tempo** e la **forma di tale funzione** dipende dalla **legge probabilistica** con cui il non funzionamento o guasto può verificarsi nel tempo.

Per **valutare l'affidabilità** di elementi si possono utilizzare **tre diversi processi**:

- utilizzare le **informazioni** che provengono dal funzionamento per **lungo periodo di tempo** di **molti elementi uguali**, nelle **stesse condizioni di funzionamento**. Se i dati sono numerosi dal punto di vista statistico, i dati possono essere utilizzati tali e quali senza bisogno di alcuna elaborazione;
- utilizzare le informazioni che provengono dal funzionamento per un **breve periodo di tempo di pochi elementi**. I dati di tali prove possono fornire una stima del comportamento, avente un certo grado di confidenza, ossia una certa probabilità di risultare "vera". I valori dell'affidabilità che si ottengono, necessitano di **elaborazione con procedimenti statistici;**
- utilizzare la conoscenza, ove questa esista, **dell'affidabilità delle parti componenti** dell'elemento per fare dei calcoli previsionali della sua affidabilità. Questo processo è utile quando, non avendo a disposizione i dati per un processo di rilevazione statistica., si voglia una valutazione dell'affidabilità di un elemento prima che siano disponibili i risultati di prove campionarie. Va notato che i **dati di affidabilità a livello di componenti** sono **più abbondanti e più facilmente reperibili**.

Si consideri una **variabile casuale T, "tempo fino al guasto di un elemento",** cioè il **tempo intercorrente fra l'istante iniziale** del periodo al quale si riferisce la valutazione della affidabilità e **l'istante in cui l'elemento si rompe**; si definisce **densità di probabilità** quella funzione g(t) tale che la **probabilità infinitesima che l'elemento si guasti al tempo t o in un suo intorno infinitesimo** sia:

$$g(t) \cdot dt$$

noto che **l'elemento funzionava al tempo t=0**. Questa probabilità è rappresentata **dall'area tratteggiata** in Figura 2

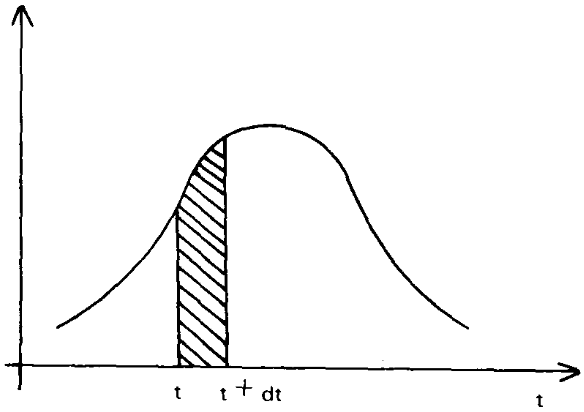

Figura 2: funzione densità di guasto

Dato che ogni elemento finisce col guastarsi nel tempo, l'area sottesa alla funzione f(t) sarà uguale all'unità

$$\int_0^\infty f(t) \cdot dt = 1$$

La probabilità che l'elemento si guasti al tempo t o precedentemente è data dalla funzione **Guastabilità G(t):**

$$G(t) = \int_0^t f(t) \cdot dt$$

L'affidabilità, cioè la **probabilità che l'elemento funzioni ancora nel tempo t** sarà data da:

$$A(t) = 1 - G(t) = 1 - \int_0^t f(t) \cdot dt = \int_t^\infty f(t) \cdot dt$$

come riportato in Figura 3

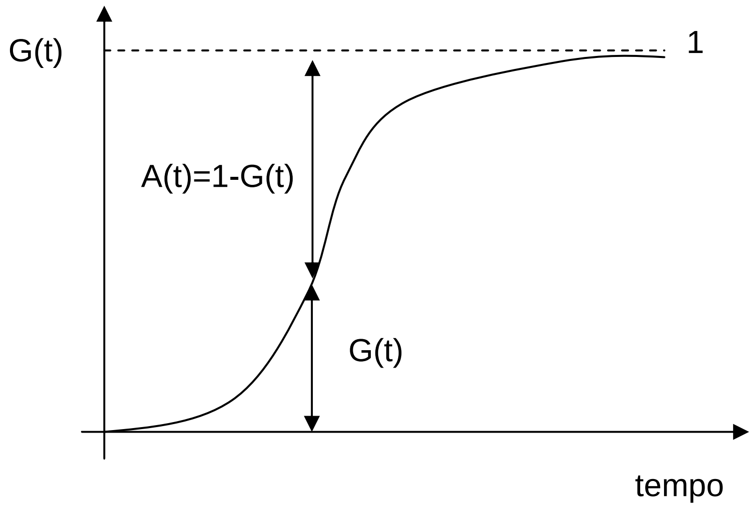

Figura 3: Affidabilità e guastabilità

La **conoscenza della funzione g(t) permette** dunque di **valutare l'affidabilità**.

Un'altra **funzione di interesse fondamentale** è rappresentata dal **tasso di guasto λ(t):** essa è tale che il **prodotto λ(t).dt** rappresenta la **probabilità condizionale** che l'elemento **si guasti in un tempo compreso fra t e t+dt supponendo che in t sia ancora funzionante**. La **differenza** fra le **due funzioni g(t) e λ(t)** sta nel fatto che mentre **g(t)dt** rappresenta la frazione di una popolazione che si rompe in un intervallo t, t+dt riferendosi ad una **popolazione sana al tempo t=0**, **λ(t)dt** rappresenta la frazione di una popolazione che si guasta nel medesimo intervallo di tempo, riferendosi però ad una **popolazione sana al tempo t**, che sarà necessariamente meno numerosa o al massimo uguale alla popolazione originaria considerata al tempo t=0.

In particolare, se si indica con **G l'evento guasto al tempo t, t+dt** e con **S l'evento assenza di guasto fino al tempo t**, si può scrivere, ricordando la relazione di probabilità condizionata

$$\lambda(t)\cdot dt = P(G\mid S) = \frac{P(GS)}{P(S)} = \frac{g(t)\cdot dt}{A(t)}$$

Dal momento che il **termine** "assenza di guasto fino al tempo t" **e** "guasto al tempo t, t+dt", **cioè P(GS)**, **coincide con la definizione data di funzione densità di guasto g(t)**

Il concetto può essere chiarito con un **esempio**. Si supponga di mettere in prova M(0) macchine tutte sane al tempo t=0. Risulta allora, indicando con m(t) il numero di macchine che si rompono dal tempo t al tempo t+dt, e con M(t) il numero di macchine sane all’istante t

$$A(t) = \frac{M(t)}{M(0)}$$

$$\lambda(t) \cdot dt = \frac{m}{M(t)}$$

$$g(t) \cdot dt = \frac{m}{M(0)}$$

$$\lambda(t) \cdot dt = \frac{g(t) \cdot dt}{A(t)}$$

La funzione tasso di guasto rappresenta quindi la funzione densità di probabilità che un apparecchio, sopravvissuto fino al tempo t, si guasti nel successivo intervallo dt. La **probabilità elementare corrispondente è λ(t)dt**, che è una **probabilità "a posteriori",** ossia **condizionata** dall'esistenza dell’informazione certa che l'apparecchio è sopravvissuto fino al tempo t. Viceversa **g(t)dt è una probabilità a priori** cioè, relativa all'istante iniziale del funzionamento.

Dalle relazioni scritte si può dedurre il legame che sussiste tra A(t) e λ(t). Infatti

$$\lambda(t) \cdot dt = \frac{g(t) \cdot dt}{A(t)}$$

$$g(t) = -\frac{dA(t)}{dt}$$

$$\lambda(t) = \frac{-\frac{dA(t)}{dt}}{A(t)}$$

$$-\lambda(t)dt = \frac{dA(t)}{A(t)}$$

$$-\int_0^t \lambda(t)dt = \int_0^t \frac{dA(t)}{A(t)}$$

$$-\int_0^t \lambda(t)dt = \ln A(t) - \ln A(0)$$

$$A(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

da cui segue

$$G(t) = 1 - A(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

$$g(t) = \frac{dG(t)}{dt} = \lambda(t) \cdot e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

Le relazioni scritte costituiscono **tre relazioni fra le quattro funzioni**

$A(t), \lambda(t), G(t), g(t),$

Data pertanto una di esse, risultano **date anche le altre tre**.

Nel seguito si fisserà l'attenzione sulla **funzione di tasso di guasto**. Si noti che il tasso di guasto ha le **dimensioni dell'inverso di un tempo** e pertanto può anche essere interpretato come "**numeri di guasto nell'unità di tempo**", che è una misura della **"velocità" o "frequenza"** del verificarsi del guasto.

Rappresentando ora in un **grafico** il **tasso di guasto di una popolazione omogenea di componenti** al **crescere della età T**, si ha un andamento risultante del tipo di quello riportato in Figura 4.

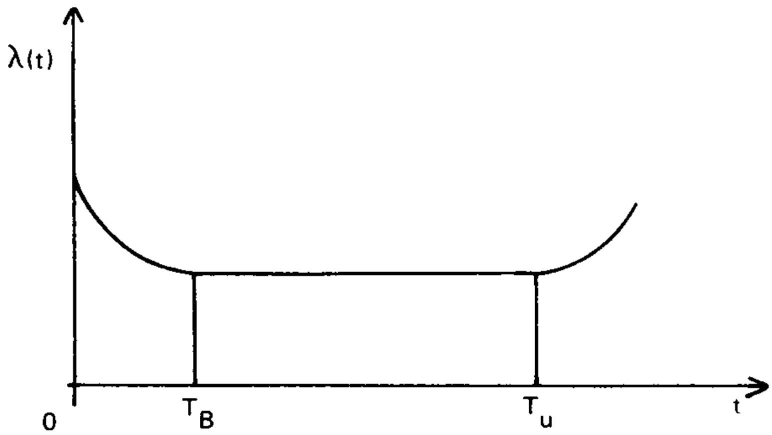

Figura 4: Andamento del rateo di guasto in funzione del tempo

Al tempo T=0 si mette in funzionamento un gran numero di apparecchi, di un certo tipo, tutti nuovi. Se nella popolazione di componenti sono presenti pezzi di struttura più debole del normale, la curva indicherà un **alto tasso di guasto iniziale**. Durante un certo periodo iniziale detto di "**mortalità infantile**" o di "**rodaggio**", nel quale i componenti deboli via via si eliminano, il tasso di guasto continua a diminuire e si stabilizza ad un valore pressoché **costante al tempo T_B**. A tale tempo si può affermare che tutti i componenti di "debole costituzione" si sono guastati.

Dopo il rodaggio la popolazione raggiunge il suo più basso **valore di λ** e questo valore rimane **approssimativamente costante** per un certo periodo di tempo cui si dà il nome di "**vita utile**". Quando i componenti raggiungono l'età T_u, comincia a farsi sentire il **fenomeno dell'usura**. Da questo momento in poi il **tasso di guasto cresce rapidamente**. Si può affermare che una **larga classe di elementi**, sottoposti ad un elevato numero di prove sperimentali, ha un andamento del tasso di guasto $\lambda(t)$ simile a quello illustrato. Il **periodo iniziale** corrisponde a dei grossi **difetti di montaggio** del materiale, in **genere di fabbricazione**. I **guasti** che si verificano nel periodo di "**vita utile**" corrispondono ad una **imperfezione del processo produttivo**, che non ha seguito fedelmente il progetto; il valore del tasso di guasto in questa fase dà una misura dello scostamento di un certo metodo di fabbricazione rispetto alla perfezione. Il periodo a **tasso di guasto crescente**, infine, corrisponde a una **degradazione irreversibile delle caratteristiche**, dovuta al progetto stesso del prodotto, eseguito in funzione di una certa durata di funzionamento.

Della variabile casuale densità di guasto è evidentemente possibile **calcolare la media**. I **valori argomentali** di tale variabile sono rappresentati **l'intero insieme dei numeri reali positivi $\Re$+**, dato che un guasto si può verificare a partire dall'istante iniziale fino al valore teorico di $t=+\infty$. La media rappresenta in questo caso il **valore del tempo medio al guasto**, oppure nel caso di **sistemi riparabili**, il **tempo medio tra due guasti consecutivi**, e si indica rispettivamente con le due espressioni inglesi **MTTF e MTBF mean time to failure** e **mean time between failure.** In quest'ultimo caso si considera come **origine dei tempi** l'istante a partire dal quale il sistema rientra in servizio, escludendo quindi dal computo il tempo necessario per la manutenzione

$$MTTF = \int_0^\infty t \cdot g(t) dt$$

Ricordando che vale

$$g(t) = -\frac{dA(t)}{dt}$$

ed integrando quindi per parti si ha

$$MTTF = \int_0^\infty t \cdot g(t)dt$$

$$MTTF = \left[t \cdot \int_0^\infty g(t)dt \right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(1 \cdot \int_0^\infty g(t)dt \right) dt$$

$$MTTF = \left[t \cdot \int_0^\infty g(t)dt \right]_0^\infty - \int_0^\infty (1 - A(t))dt$$

$$MTTF = [t \cdot G(t)]_0^\infty - [t]_0^\infty + \int_0^\infty A(t)dt$$

$$MTTF = [t \cdot G(t) - t]_0^\infty + \int_0^\infty A(t)dt$$

$$MTTF = [t \cdot (G(t) - 1)]_0^\infty + \int_0^\infty A(t)dt$$

$$MTTF = \int_0^\infty A(t)dt$$

che è l’espressione generale che verrà utilizzata per il calcolo di MTTF e MTBF

5.3 LEGGI STATISTICHE PER IL RATEO DI GUASTO

Come visto una volta **noto l’andamento del rateo di guasto** in funzione del tempo, é possibile ricavare le espressioni per **affidabilità, guastabilità e densità di guasto** tramite le relazioni

$$A(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

$$G(t) = 1 - A(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

$$g(t) = \frac{dG(t)}{dt} = \lambda(t) \cdot e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

L’andamento del **rateo di guasto** può essere nel tempo **decrescente, costante oppure crescente** a **seconda del periodo considerato**, come mostrato in Figura 4.

Se si considera il **periodo di vita utile**, il valore di λ **può essere ritenuto costante**; si hanno quindi per **l’affidabilità**, la **guastabilità** e la **densità di guasto** le seguenti espressioni

$$A(t) = e^{-\lambda \cdot t}$$
$$G(t) = 1 - A(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$$
$$g(t) = \frac{dG(t)}{dt} = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Inoltre il **valore di MTTF** sarà

$$MTTF = \int_0^\infty A(t) \cdot dt = \int_0^\infty e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt$$
$$MTTF = \int_0^\infty e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt$$
$$MTTF = \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

e quindi sostituendo

$$A(t) = e^{-\frac{t}{MTTF}}$$
$$G(t) = 1 - A(t) = 1 - e^{-\frac{t}{MTTF}}$$
$$g(t) = \frac{dG(t)}{dt} = \frac{1}{MTTF} \cdot e^{-\frac{t}{MTTF}}$$

Gli andamenti per affidabilità e densità di guasto vengono riportati in Figura 5. Si nota come la **pendenza nel punto t=0 dell'esponenziale negativa** rappresentante l'affidabilità, sia data dal valore del rateo di guasto ; quindi **l'affidabilità di un elemento diminuisce tanto più rapidamente quanto maggiore è il valore del rateo di guasto**.

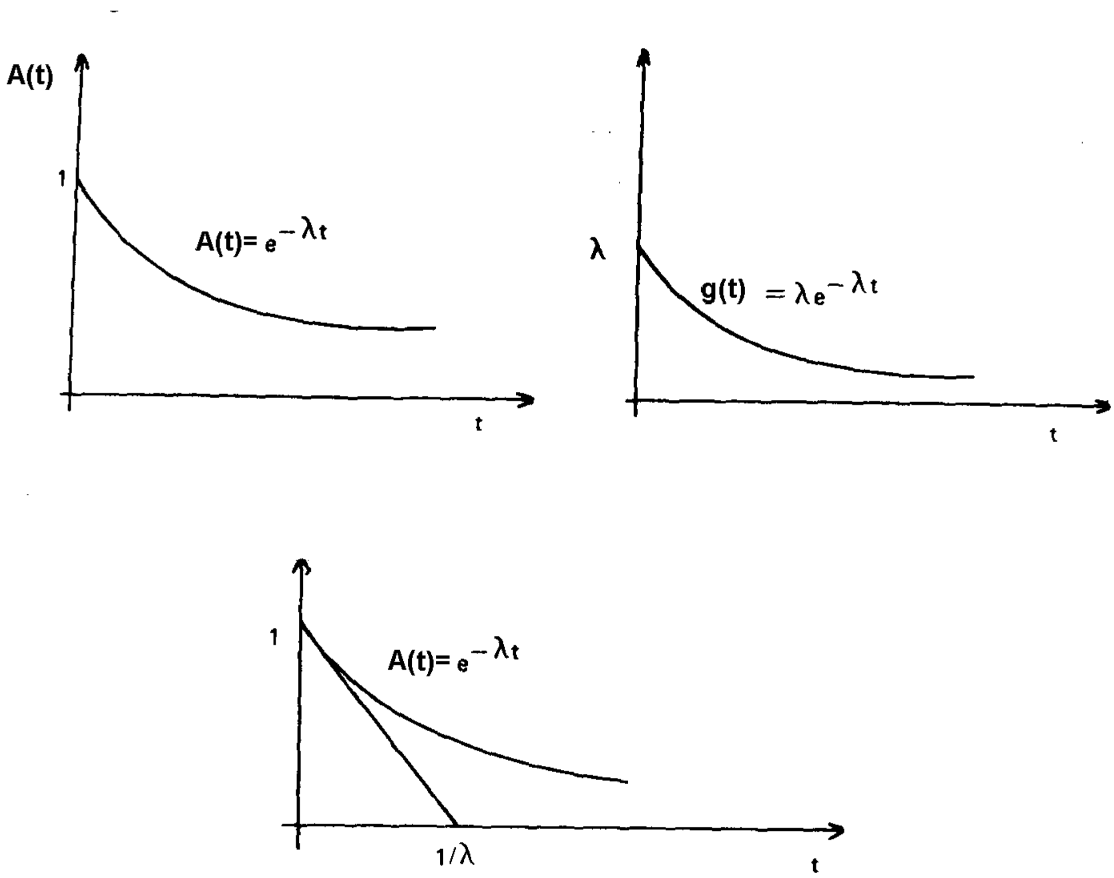

Figura 5: Andamento dell’affidabilità e della densità di guasto nel periodo di vita utile

In affidabilità la **distribuzione esponenziale**, corrispondente ad un **tasso di guasto costante**, ha **un'importanza fondamentale**. Tale importanza deriva essenzialmente da due fatti: il primo è che i **calcoli**, nel caso di una distribuzione esponenziale negativa, sono **sensibilmente meno complicati**, come si vedrà parlando di sistemi complessi; il secondo è che questa distribuzione rappresenta la legge tipica di **occorrenza di fenomeni puramente casuali**, cioè le cui **cause siano esclusivamente accidentali**. In altre parole in questi apparecchi il **modo di funzionare è indipendente dal particolare istante considerato** nella loro vita e **l’affidabilità dell'elemento è uguale per tempi di funzionamento uguali**, indipendentemente da quale sia l'istante che si considera iniziale nel funzionamento stesso. Ciò comunemente si esprime col dire che **l'elemento "non ha memoria"** ossia che il suo **comportamento è identico qualunque sia stata la sua storia, ossia qualunque sia l’intervallo considerato**.

Nel **periodo di vita utile**, le **caratteristiche del guasto** soddisfano le ipotesi per poter applicare la **distribuzione di Poisson**, ossia **stazionarietà**, **non molteplicità**, **indipendenza**. Il rateo di guasto è infatti costante in ogni intervallo t, t+dt considerato, si può ritenere che in un intervallo infinitesimo t, t+dt avvenga al massimo un guasto, infine i guasti sono tra loro indipendenti. Si può allora considerare una **variabile casuale** "**numero di guasti al tempo t**" distribuita Poissonianamente, in cui il numero di eventi che si verificano in [0,…,t] è dato dalla relazione

$$P(n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t}$$

Ora dal momento che **l'affidabilità** esprime la probabilità che il componente funzioni all'istante t, essa è espressa dalla **probabilità che in [0,…,t] non si verifichi nessun guasto**, ossia

$$A(t) = P(0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

ritrovando quindi la formula scritta in precedenza

Si analizzano ora alcuni **casi** in cui si é in presenza di **tasso di guasto sensibilmente costante**.

Si è visto che quando un elemento raggiunge una certa età, il tasso di guasto cresce rapidamente (**usura**). Se si vuole ovviare a tale inconveniente, cioè riportare il tasso di guasto a valori più bassi e l'affidabilità a valori più elevati, si deve intervenire per compiere una **manutenzione preventiva**. Si **intende** per **manutenzione preventiva** quell'insieme di **operazioni**, generalmente eseguite ad **intervalli di tempo regolari**, che hanno lo **scopo** di **assicurare il previsto livello di prestazione, affidabilità e sicurezza**, **prevedendo e contrastando il verificarsi di guasti**. Gli interventi di manutenzione preventiva prevedono **ispezioni controlli** e **revisioni** totali o parziali, durante le quali si eseguono **operazioni** di **lubrificazione**, **pulizia**, **regolazione**, si esaminano, riparano o sostituiscono eventuali elementi guasti, si revisionano o sostituiscono gli elementi prossimi allo scadere della loro vita utile. Si può vedere nel diagramma di Figura 6, come si **modificano le curve λ(t), A(t), con interventi di manutenzione preventiva**. Si considera il caso in cui λ(t) assume una configurazione analoga a quella esaminata precedentemente, cioè λ(t) costante fino ad un certo tempo e poi crescente rapidamente. Si trascura quindi il periodo della mortalità infantile. Si vede che, con una manutenzione preventiva programmata all'istante T_p, in cui per esempio A(t) = 0,7, si riesce a mantenere un tasso di guasto pressoché costante per lunghi periodi di tempo e che di conseguenza la distribuzione esponenziale si adatta bene a rappresentare il funzionamento.

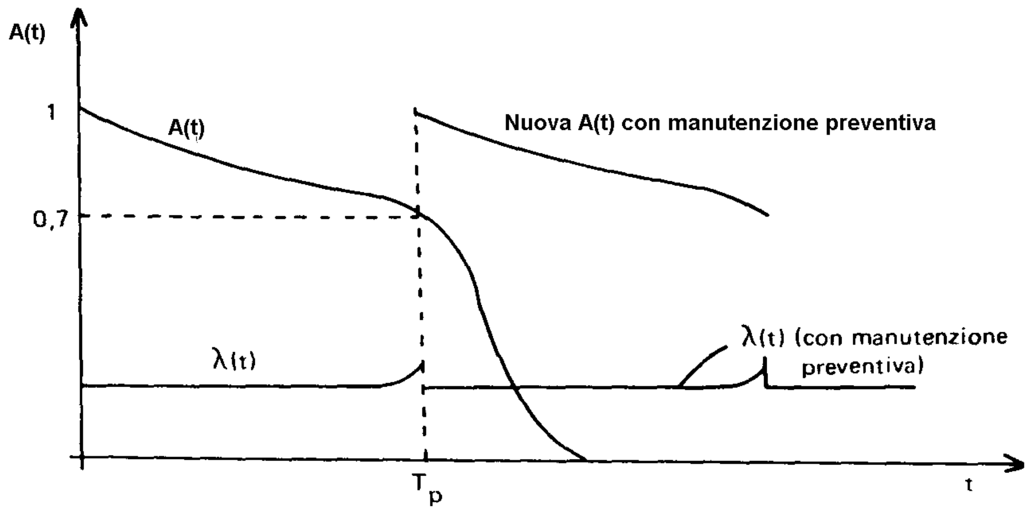

Figura 6: Affidabilità in seguito ad interventi di manutenzione preventiva all'inizio del periodo di usura

Si consideri ora un **tasso di guasto crescente nel tempo**, che viene periodicamente riportato al valore iniziale, mediante operazioni di manutenzione preventiva come illustrato in Figura 7; Come si vede il **tasso di guasto oscilla tra i valori λ_1 e λ_2**; tuttavia, in prima approssimazione, lo si potrà assumere costante e pari al valore medio, con grande semplificazione nei calcoli dell'affidabilità:

$$\lambda = cost = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

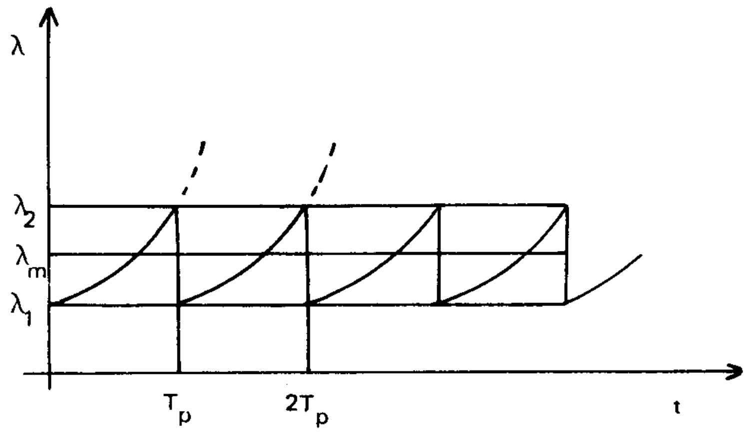

Figura 7. Rateo di guasto in seguito ad interventi di manutenzione preventiva nel periodo di usura

Nei casi visti fino ad ora l'adozione della **manutenzione preventiva risulta vantaggiosa**, dal momento che consente di **mantenere costante o di ridurre il valore del rateo di**

guasto; Non è detto però che il ricorso alla manutenzione preventiva sia sempre vantaggioso; se si considera ad esempio il caso in cui si intervenga con manutenzione preventiva durante la fase a λ=costante, come riportato in Figura 8, non si avrebbe alcun vantaggio, dal momento che l'andamento dell'affidabilità rimarrebbe comunque lo stesso

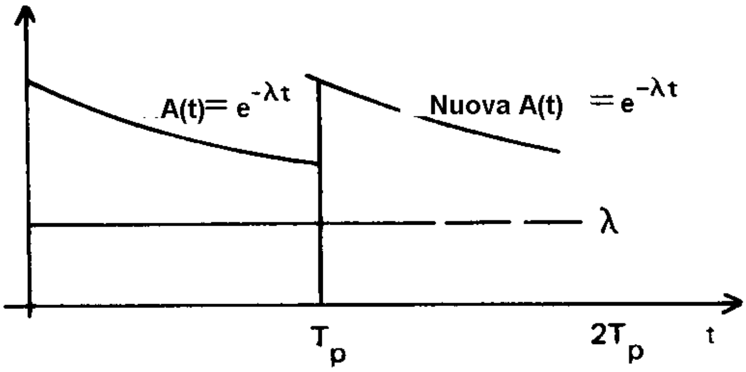

Figura 8: Affidabilità in seguito ad interventi di manutenzione preventiva nel periodo di vita utile

Nel caso poi in cui si avesse un tasso di guasto decrescente nel tempo (Figura 8), interventi di manutenzione preventiva sarebbero doppiamente dannosi dal momento che, oltre a rappresentare un costo, comportano anche un innalzamento del valore di λ ad ogni intervento

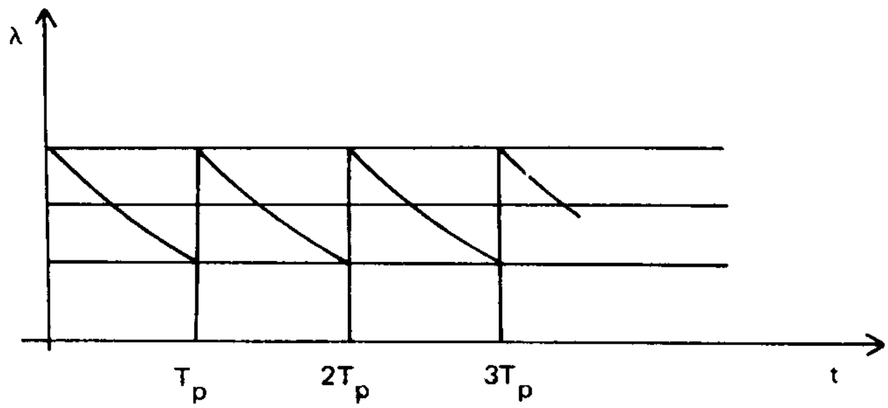

Figura 9: Rateo di guasto in seguito ad interventi di manutenzione preventiva nel periodo di rodaggio

Un altro caso in cui λ **può essere considerato costante** è quello in cui il **tasso di guasto dei sistema** risulta uguale alla **somma dei tassi di guasto delle sue parti costitutive**, come si vedrà in seguito parlando dei sistemi serie. Se le parti costitutive hanno tassi di guasto costanti il λ del sistema sarà ovviamente costante; ma **anche quando i vari tassi**

di guasto del sistema sono variabili nel tempo, la loro somma, a causa di **compensazioni**, può risultare pressappoco costante, come è illustrato in Figura 10

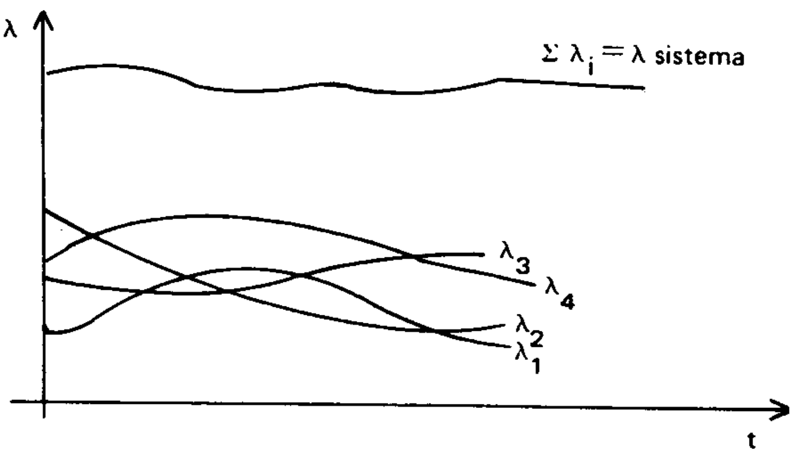

Figura 10: Rateo di guasto del sistema, somma dei ratei di guasto dei componenti

La distribuzione più adatta per descrivere l'andamento del **rateo di guasto** in **funzione del tempo** durante il **periodo di rodaggio** e comunque nel caso di ratei di guasto decrescenti nel tempo è rappresentata dalla **distribuzione di Weibull**, espressa dalla relazione

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot t^{(\beta-1)}$$

con **α e β costanti positive**. Tra le due costanti il parametro di gran lunga più importante è senza dubbio β, dal momento che per valori di **β=1** il rateo di guasto è **costante** nel tempo, per valori di **β minori di 1**, l'andamento è **decrescente**, mentre per **β>1** l'andamento del rateo di guasto è **crescente** nel tempo.
In base alle relazioni che legano il rateo di guasto alla densità di guasto ed all'affidabilità si hanno per queste ultime grandezze le seguenti espressioni:

$$A(t) = e^{-\int \lambda(t) \cdot dt} = e^{-\frac{\beta}{\alpha}\int_0^\infty t(\beta-1) \cdot dt} = e^{-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\left[t^\beta\right]_0^t} = e^{-\frac{t^\beta}{\alpha}}$$

$$MTBF = \int_0^\infty A(t)dt = \int_0^\infty e^{-\frac{t^\beta}{\alpha}} \cdot dt$$

Gli andamenti per rateo di guasto, densità di guasto ed affidabilità vengono riportati in Figura 11, per diversi valori di α e β

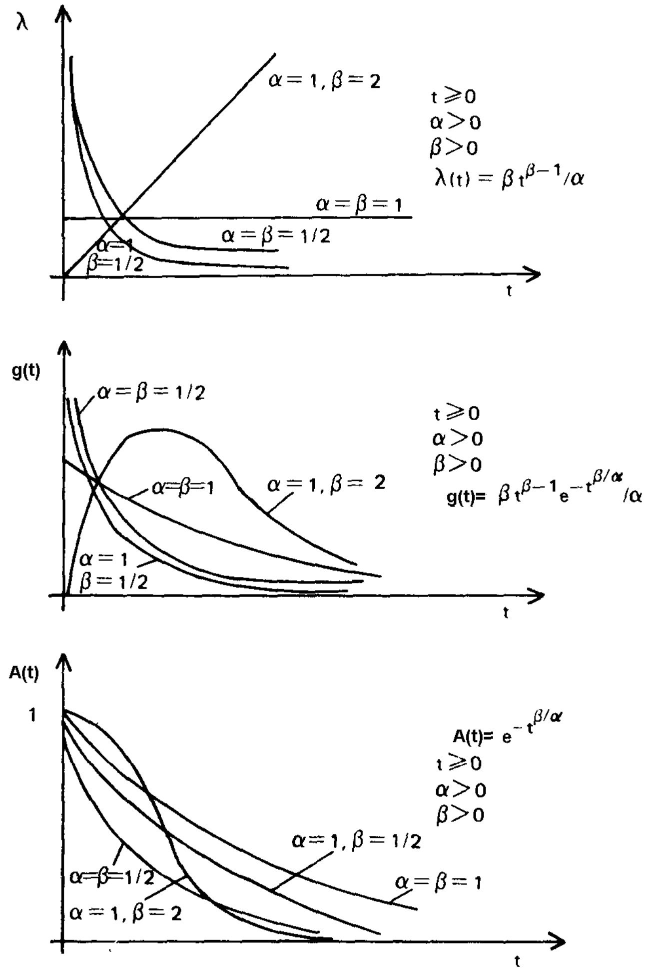

Figura 11. andamento del rateo di guasto, della densità di guasto e della affidabilità durante il periodo di rodaggio

Per quanto riguarda infine il **periodo dell'usura**, caratterizzato da un **rateo di guasto crescente**, il modello matematico che meglio si adatta è quello che prevede per la **densità di guasto una distribuzione normale** con media μ e varianza σ^2.

Si ha allora

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot o} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2o^2}}$$

$$A(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot o} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2o^2}} dt$$

$$\lambda(t) = \frac{g(t)}{A(t)} = \frac{e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2o^2}}}{\int_0^t e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2o^2}} dt}$$

Si ha quindi per il **rateo di guasto, densità di guasto ed affidabilità un andamento** riportato in Figura 12:

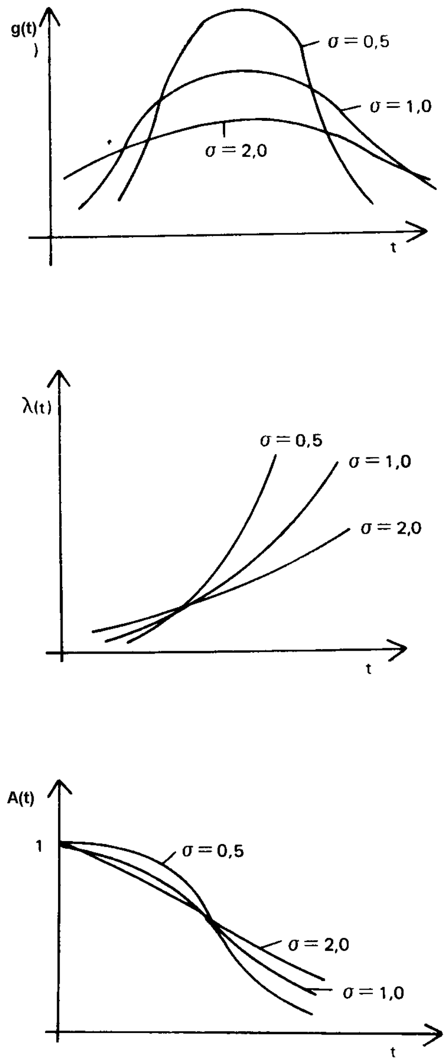

Figura 12: andamento del rateo di guasto, della densità di guasto e della affidabilità durante il periodo di usura

Si vede come **all'aumentare della varianza della funzione g(t),** ossia della dispersione dei valori di guasto rispetto al valore medio, il valore del **rateo di guasto tenda a diminuire**; viceversa **per valori della varianza ridotti**, il che significa guasti concentrati attorno al valor medio, il **rateo di guasto**, che esprime il numero medio di guasti nell'unità di tempo, **tende ad aumentare.**

5.4 AFFIDABILITÀ DEI SISTEMI

Finora si è parlato dell'affidabilità di un elemento senza preoccuparsi della sua complessità. Si analizzano ora le **relazioni che legano l'affidabilità di un sistema complesso a quella dei singoli componenti**. Detto **in termini matematici** si vuole esprimere la relazione

$$A_s(t) = f(A_1(t), A_2(t), \ldots, A_n(t),)$$

dove **A_s, rappresenta l'affidabilità del sistema** e **A_j j=1,..,n quella dei singoli componenti**.

La **conoscenza delle leggi** con cui le affidabilità dei singoli elementi componenti concorrono a formare quelle dei sistemi, é **importante per**:

- dedurre le **caratteristiche di sicurezza di funzionamento di un insieme**, sulla scorta dei **dati storici di guasto delle parti che lo compongono**;
- trarre indicazioni utili per **impostare una politica di manutenzione preventiva** attraverso la conoscenza **dell'effetto** prodotto **dall'intervento su di un certo elemento, sulle caratteristiche del sistema** nel suo complesso;
- analizzare le **cause di mal funzionamento di un elemento** e prevedere le azioni correttive più efficaci;
- progettare un **sistema con caratteristiche ottimali di affidabilità**, mediante duplicazioni di alcune funzioni (v. sistemi ridondanti).

Ora **l'affidabilità di un sistema** non è altro che la **probabilità** di **ricorrenza dell'evento "non guasto",** che a sua volta risulta dalla **combinazione di più eventi semplici**. Pertanto le regole di **combinazione delle affidabilità coincidono con le regole generali di combinazione delle probabilità di eventi qualsiasi**.

Le **parti componenti** di un sistema possono comportarsi, dal punto di vista affidabilistico, in **maniera indipendente o meno,** ossia il verificarsi di un **guasto di una parte** costituisce un **evento casuale statisticamente indipendente (o meno) dal verificarsi di un guasto in un'altra parte**; cioè il verificarsi di un guasto in una parte non altera la probabilità di occorrenza di guasto in un'altra parte. Nel caso in cui le **parti di un sistema** si comportino in **modo indipendente**, la loro **affidabilità** può venire definita analiticamente a **partire da quella dei singoli componenti**. Ciò non è possibile quando il guasto di un singolo componente può influenzare la probabilità di accadimento del guasto su un altro componente costituente il sistema. D'altra parte è **sempre possibile soddisfare questa ipotesi**, pur di non spingere oltre un certo limite la suddivisione del sistema nei componenti che la costituiscono, in modo da considerare il **sistema costituito** da **blocchi tra loro indipendenti**.

Il funzionamento di un sistema dal punto di vista dell’affidabilità viene graficamente rappresentato mediante **schemi a blocchi opportunamente interconnessi**, in cui ogni **blocco** rappresenta un **sottosistema** o un **componente**. Questi schemi **non trovano** in generale **corrispondenza nello schema funzionale** dell'impianto (flow-sheet). Infatti essi rappresentano graficamente la **dipendenza logica dell'evento "guasto del sistema" dall'evento "guasto di un certo componente",** il che non è in generale in corrispondenza con la dislocazione fisica e la funzione svolta dai singoli componenti. **Ad esempio**, si immagini una linea vapore ad alta pressione ed una vapore a bassa pressione, collegate da una valvola di sicurezza automatica e da una manuale, poste su due rami distinti; rispetto al guasto “perdita di vapore dal circuito alta pressione a quello bassa pressione” il sistema si comporta secondo lo schema a) di Figura 13, mentre rispetto al guasto “mancata alimentazione della rete a bassa pressione” lo stesso sistema si comporta secondo lo schema b)

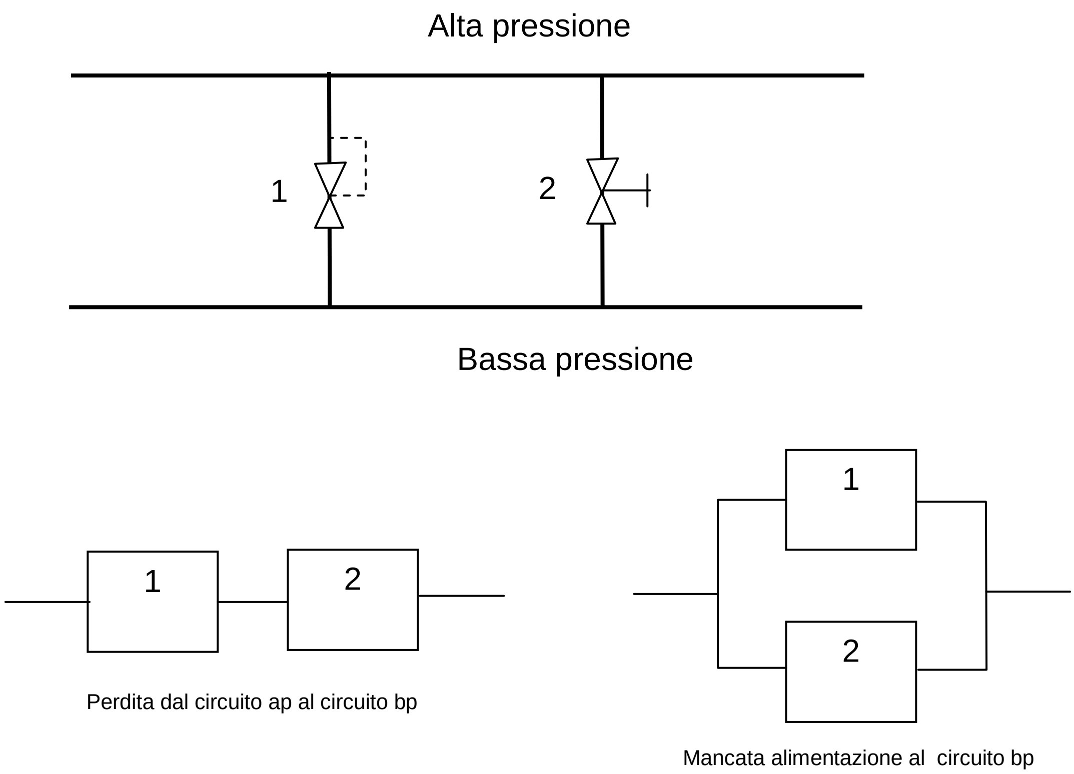

Figura 13: schema logico “serie” e schema “Parallelo” per uno stesso sistema fisico

In definitiva si potrà dire che, se un elemento di impianto risulta rappresentato **“in parallelo”** nello schema logico, **un suo guasto non provoca il fuori servizio dell’intero sistema**; mentre l’opposto accade nel caso della **rappresentazione “in serie**”, in cui invece il **guasto del singolo componente comporta il guasto dell’intero sistema**. La rappresentazione serie o parallelo, che è una **rappresentazione puramente logica** del sistema e non coincide generalmente con lo schema funzionale, **varia** per un medesimo sistema in **funzione del guasto considerato**.
I due schemi logici rappresentati, **serie e parallelo**, costituiscono gli **schemi fondamentali** tramite i quali analizzare i sistemi complessi; un **sistema complesso** può essere infatti **ricondotto ad una combinazione di sottosistemi elementari serie o parallelo**, ed è su questi che verrà quindi focalizzata nel seguito l’attenzione.

5.5 SISTEMI SERIE

Un sistema di n componenti viene considerato **serie** rispetto ad un determinato evento guasto, quando l’evento **guasto si verifica** nel momento in cui **almeno un componente del sistema è guasto**. La **schematizzazione logica** di un sistema siffatto viene riportata in Figura 14.

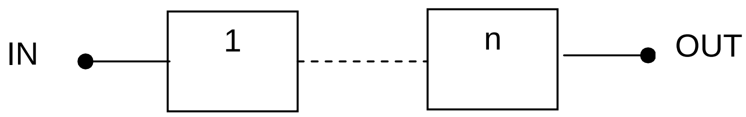

Figura 14: schematizzazione del sistema serie

Dal momento che l’affidabilità del sistema esprime la probabilità che il sistema sia in condizioni di buon funzionamento al generico istante, se si suppongono i **guasti dei singoli componenti** tra loro **indipendenti**, **l’affidabilità del sistema** di n componenti in serie è data dal **prodotto delle affidabilità** dei singoli componenti, ossia

$$A_s(t) = \prod_{i=1}^{n} A_i(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\int_0^t \lambda_i(t)dt}$$

$$A_s(t) = e^{-\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \lambda_i(t)dt} = e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)dt} = e^{-\int_0^t \lambda_S(t)dt}$$

da cui si ha che il **rateo di guasto del sistema** è uguale alla **somma** dei ratei di guasto dei singoli componenti

$$\lambda_s(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)$$

Se si suppone che tutti i **componenti** del sistema si trovino nel **periodo di vita utile** e che dunque siano caratterizzati da un **rateo di guasto costante**, anche il rateo di guasto del sistema sarà costante

$$\lambda_s(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) = cos\,t$$

e quindi sostituendo nell'espressione appena ricavata si ottiene

$$A_s(t) = e^{-\int_0^t \lambda_s(t)dt} = e^{-\lambda_s t} = e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda i t}$$

che rappresenta l'espressione dell'affidabilità per un sistema serie di n componenti nel periodo di vita utile.

Per quanto riguarda l'espressione del **MTTF** si ha:

$$MTTF_s = \int_0^\infty A(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda_s t}dt = \left[-\frac{1}{\lambda_s} e^{-\lambda_s t} \right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda_s}$$

e ricordando che per un singolo componente si aveva

$$MTTF_i = \frac{1}{\lambda_i}$$

si ha quindi

$$MTTF_s = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{MTTF_i}}$$

5.6 SISTEMI PARALLELO A FUNZIONAMENTO PERMANENTE

Un sistema di n componenti viene considerato **parallelo a funzionamento permanente** rispetto ad un determinato evento guasto, quando l'evento **guasto si verifica** nel momento in cui **tutti i componenti o un certo numero di componenti del sistema sono guasti**, posto che tutti i componenti sono in funzione contemporaneamente. La **schematizzazione logica** di un sistema siffatto viene riportata in Figura 15

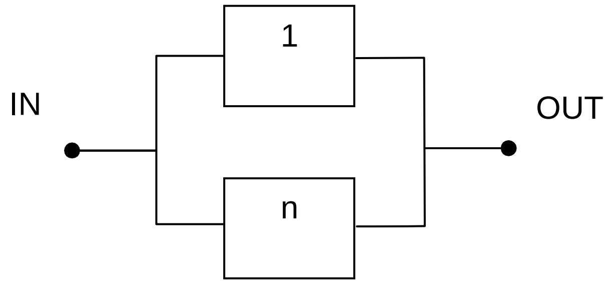

Figura 15: schematizzazione di un sistema in parallelo a funzionamento permanente

Il sistema si dice in **ridondanza semplice** nel caso in cui il sistema è guasto nel momento in cui **tutti i componenti sono guasti**, mentre è in **ridondanza multipla** quando il funzionamento del sistema è garantito dal **funzionamento** di **almeno due componenti**

Nel caso di un sistema parallelo a funzionamento permanente in ridondanza semplice, il calcolo dell'affidabilità viene effettuato partendo dalla guastabilità del sistema, ed osservando che il sistema è guasto al generico istante se tutti i componenti del sistema sono guasti a quell'istante. Quindi

$$G_s(t) = \prod_{i=1}^{n} G_i(t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - A_i(t)) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - e^{-\int_0^t \lambda_i(t) dt} \right)$$

$$A_s(t) = 1 - G_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - e^{-\int_0^t \lambda_i(t) dt} \right)$$

Se si suppone che tutti i **componenti** si trovino nel periodo di **vita utile** e che i **ratei di guasto** siano tra loro tutti **uguali**, ossia

$$\lambda_1(t) =,...,= \lambda_n(t) = cost$$

si ottiene

$$A_s(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^n$$

ricordando l'espressione del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

e quindi ponendo

$$a = (-1) \cdot e^{-\lambda t}$$
$$b = 1$$

si ottiene la seguente espressione

$$A_s(t) = 1 - \left(1 - \binom{n}{1} \cdot e^{-\lambda t} + \binom{n}{2} \cdot e^{-2\lambda t} - \binom{n}{3} \cdot e^{-3\lambda t} + ...\right)$$
$$A_s(t) = n \cdot e^{-\lambda t} - \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot e^{-2\lambda t} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot e^{-3\lambda t} - ...$$

Per quanto riguarda **il MTTF** del sistema quindi si ha

$$MTTF_s = \int_0^\infty A(t)dt = \int_0^\infty \left(n \cdot e^{-\lambda t} - \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot e^{-2\lambda t} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot e^{-3\lambda t} - ... \right) dt$$
$$MTTF_s = \left[-\frac{n}{\lambda} e^{-\lambda_s t} \right]_0^\infty - \left[-\frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{2 \cdot \lambda} e^{-2\lambda t} \right]_0^\infty + \left[-\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{3 \cdot \lambda} e^{-3\lambda t} \right]_0^\infty - ..... =$$
$$MTTF_s = \frac{n}{\lambda} - \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{2 \cdot \lambda} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{3 \cdot \lambda} - ....$$

che rappresenta **l'espressione generale per il MTTF nel caso di n componenti in parallelo in ridondanza semplice**.
Nel caso ad esempio di un sistema costituito da **due soli componenti**

$$MTTF_2 = \frac{2}{\lambda} - \frac{2 \cdot (2-1)}{2!} \cdot \frac{1}{2 \cdot \lambda} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

ossia **superiore del 50%** rispetto al componente preso singolarmente

5.7 SISTEMI PARALLELO A FUNZIONAMENTO SEQUENZIALE

I sistemi in parallelo a funzionamento sequenziale si differenziano rispetto al caso visto precedentemente dal momento che, mentre nel caso di sistemi a funzionamento permanente gli n componenti funzionano tutti contemporaneamente, nel caso di **funzionamento sequenziale funziona sempre un solo componente alla volta**; nel momento in cui si verifica un guasto sul componente in funzione in quel momento, un commutatore permette di mettere in funzionamento un componente che si trovava precedentemente in condizioni di stand by.

Lo **schema logico** del sistema, nel caso di due componenti, viene riportato in Figura 16

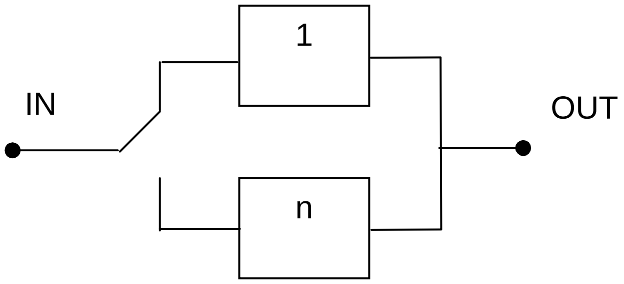

Figura 16: Schema logico di un sistema in parallelo di due componenti a funzionamento sequenziale

Il **calcolo dell'affidabilità** viene inizialmente fatto per il sistema a **due componenti**, estendendo quindi il discorso al caso generale di sistema ad n componenti. In entrambi casi si ritiene **l'affidabilità del commutatore unitaria**

Nel caso di due soli componenti, il **sistema funziona all'istante generico t**, se funziona il componente 1, oppure, noto che si sia guastato il componente 1 all'istante generico τ, con $0<\tau<t$, il componente 2, che è entrato in funzione all'istante τ, funziona all'istante t. Quindi

$$A_s(t) = A_1(t) + \int_0^t g_1(\tau) \cdot A_2(t-\tau) \cdot d\tau$$

$$A_s(t) = e^{-\lambda t} + \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda\tau} \cdot e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau$$

$$A_s(t) = e^{-\lambda t} + \lambda \cdot \int_0^t \cdot\, e^{(-\lambda\tau + \lambda t + \lambda\tau)} d\tau$$

$$A_s(t) = e^{-\lambda t} + \lambda \cdot \int_0^t \cdot\, e^{(-\lambda\tau + \lambda t + \lambda\tau)} d\tau$$

Dove si sono supposti i **ratei di guasto costanti ed uguali tra di loro**.

Dal momento che t è fisso mentre la variabile è τ, la quantità all'interno dell'integrale è costante e quindi si ottiene

$$A_s(t) = e^{-\lambda t} + \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot t$$

$$A_s(t) = e^{-\lambda t} \cdot (1 + \lambda t)$$

che rappresenta l'espressione **dell'affidabilità per un sistema di due elementi in parallelo a funzionamento sequenziale**.

Allo stesso risultato si poteva arrivare attraverso la **seguente osservazione**: il sistema in questione, per le ipotesi fatte, funziona all'istante t se nell'intervallo [0,…,t] non si sono verificati guasti o, al massimo si è verificato un solo guasto. Ritenendo la **probabilità di guasto di un componente distribuita Poissonianamente** per le ipotesi di costanza del rateo di guasto, si ha allora

$$A_s(t) = P(0) + P(1)$$
$$A_s(t) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^1}{1!} \cdot e^{-\lambda t}$$
$$A_s(t) = e^{-\lambda t} \cdot (1 + \lambda t)$$

L'espressione **dell'affidabilità** per un **sistema ad n componenti in parallelo a funzionamento sequenziale** può essere allora semplicemente ricavata come probabilità di avere al massimo n-1 guasti nell'intervallo [0,…,t], ossia

$$A_{s_n}(t) = P(0) + P(1) + \ldots + P(n-1)$$
$$A_{s_n}(t) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^1}{1!} \cdot e^{-\lambda t} + \ldots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\lambda t}$$
$$A_{s_n}(t) = e^{-\lambda t} \cdot \left(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} \ldots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \right)$$

Se il **numero di componenti tende all'infinito**, la serie

$$\left(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} \ldots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \right)$$

tende ad $e^{\lambda t}$, e quindi l'affidabilità del sistema, all'aumentare del numero dei componenti, tende all'unità
per quanto riguarda infine il valore del **MTTF** si ha:

$$MTTF_{s_n} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot \left(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} ... + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \right) dt$$

$$MTTF_{s_n} = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot k\lambda \right) \right) dt$$

$$MTTF_{s_n} = \frac{1}{\lambda} - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{k!} \cdot k\lambda \right) \right) dt$$

$$MTTF_{s_n} = \frac{1}{\lambda} + \int_0^\infty \left(e^{-\lambda t} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \right) dt$$

$$MTTF_{s_n} = \frac{1}{\lambda} + \int_0^\infty \left(e^{-\lambda t} \cdot \left(\frac{(\lambda t)^{-1}}{(-1)!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \right) dt$$

$$MTTF_{s_n} = \frac{1}{\lambda} + \int_0^\infty \left(e^{-\lambda t} \cdot \left(\sum_{h=0}^{n-2} \frac{(\lambda t)^{h}}{(h)!} \right) \right) dt$$

ci si è quindi ricondotti all’integrale di partenza che viene nuovamente risolto per parti ottenendo il valore 1/λ ed abbassando di grado la sommatoria. In definitiva si ottiene

$$MTTF_{s_n} = \frac{1}{\lambda} + ... + \frac{1}{\lambda} + \int_0^\infty \left(e^{-\lambda t} \right) dt = \frac{n}{\lambda}$$

Quindi ad esempio, nel caso di due componenti in parallelo a funzionamento sequenziale raddoppia, mentre si era visto che nel caso di funzionamento permanente si aveva un incremento del 50%

5.8 DISPONIBILITÀ DI SISTEMI INDUSTRIALI

I calcoli di affidabilità visti nei paragrafi precedenti sono particolarmente significativi per i componenti ed i **sistemi non riparabili**, ossia per quei casi in cui l’accadimento del guasto comporta la sostituzione del componente o del sistema; nella maggior parte dei casi impiantistici però si ha a che fare con **sistemi e componenti riparabili**, ossia componenti sui quali, al momento del verificarsi del guasto, possono essere apportati **interventi di manutenzione** atti a riportare il sistema in **condizioni di buon funzionamento**. Apparecchiature e sistemi riparabili quindi nella loro vita compiono numerosi cicli; i parametri di affidabilità sono ancora calcolabili, sebbene con maggiori difficoltà matematiche, tuttavia in questo caso assume maggiore importanza un altro parametro, nel

quale confluiscono due termini, che tengono conto l'uno della **frequenza dei guasti** e l'altro dei **tempi di riparazione**: questo parametro é detto **disponibilità, (availability).**
La disponibilità é direttamente correlata con la **capacità di utilizzazione degli impianti**, vista **sotto l'aspetto tecnico**, escludendo cioè cause di fermata di natura organizzativa generale o di politica aziendale. Alla disponibilità può essere attribuito un duplice significato: essa infatti da una parte rappresenta la **percentuale di tempo di buon funzionamento del sistema produttivo**, calcolata su un lungo periodo di tempo; essa è quindi espressa dal rapporto tra il **tempo produttivo lordo** e il **tempo di utilizzo netto.**

$$D = \frac{T_{UN} - T_{gm}}{T_{UN}} = \frac{T_{PL}}{T_{UN}}$$

Dall'altra parte può essere interpretata come probabilità, e precisamente come la **probabilità** che, in un istante di tempo generico il **sistema (riparabile) sia funzionante**. Tale **probabilità** é in generale **funzione del tempo trascorso** a partire dal momento in cui il sistema é "nuovo"; il calcolo di tale funzione é possibile anche se complicato analiticamente.
In genere é però sufficiente riferirsi ad un **valore "a regime**" cioè quando è trascorso un certo tempo dall'istante iniziale della vita. In questo caso il valore della **disponibilità** é **costante nel tempo** ed ha lo stesso valore del **rapporto percentuale del tempo di funzionamento rispetto al tempo globale**. In termini analitici la disponibilità è quindi data da:

$$D = \frac{UT}{UT + DT}$$

ove:

- **UT (up-time)** rappresenta il tempo in cui il **sistema é realmente disponibile** per il funzionamento, cioè il tempo in cui il **sistema potrebbe essere in esercizio**, (indipendentemente dal fatto che si decida di farlo funzionare o meno), **somma** dei **tempi di effettivo funzionamento e dei tempi di attesa**;
- **DT (down-time).** rappresenta il **tempo di fuori servizio imputabile a cause tecniche,** quali **guasti e manutenzioni,** in cui quindi **non vengono conteggiate** le **fermate per politiche organizzative** del lavoro**.** Il **tempo di fuori servizio DT** di un impianto dovuto ai guasti é la risultante di numerosi fattori concorrenti, come riportato in Figura 17.

In una prima classificazione, è possibile suddividere il tempo di fuori servizio imputabile a cause tecniche distinguendo **tempi di manutenzione preventiva** ed i **tempi per manutenzione in seguito a guasto.** In particolare, mentre nel caso di **manutenzione preventiva** non è possibile identificare dei tempi standard di riferimento, dal momento che le operazioni di manutenzione preventiva dipendono fortemente dall'impianto considerato; nel caso di **manutenzione in seguito a guasto** invece è possibile identificare una **serie di tempi componenti**, la cui **somma** fornisce il **valore complessivo del tempo di fermata in seguito a guasto**. Questi tempi sono:

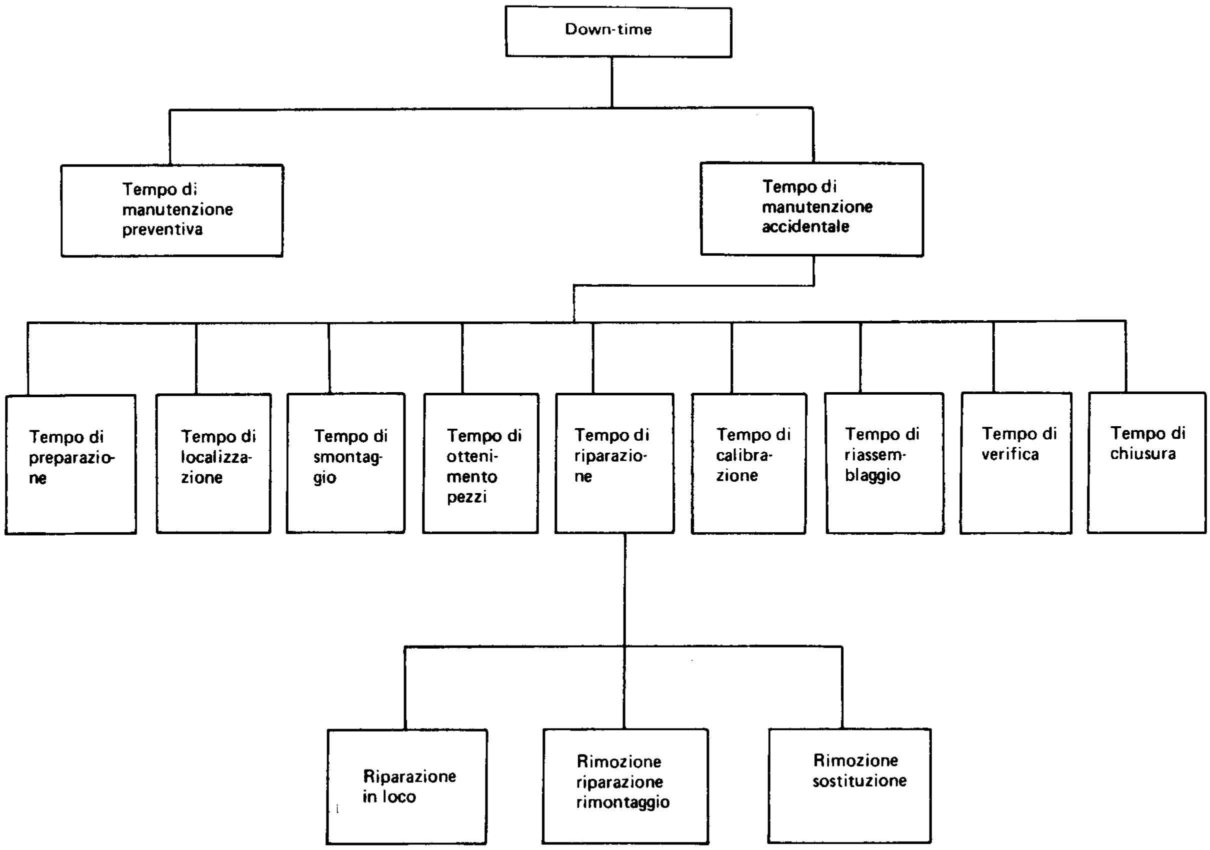

Figura 17. Composizione del Down time

- Il **tempo di preparazione**: é quella parte del tempo di manutenzione necessario per **ottenere le apparecchiature**, gli **strumenti** per i **controlli**, i **manuali** di **manutenzione** e per la fornitura degli strumenti necessari per iniziare l'operazione di localizzazione del guasto.
- Il **tempo di localizzazione:** é quella parte di tempo durante la quale il **guasto deve essere individuato**; si fanno test ed analisi sulla macchina, al fine di isolare la causa del guasto.

- Il **tempo di smontaggio** é quella parte del tempo necessario per **accedere alle parti guaste** e decidere il da farsi (riparazione o sostituzione).
- Il **tempo di ottenimento dei pezzi di ricambio** é quella parte di tempo di manutenzione durante la quale i pezzi di ricambio per i componenti da sostituire sono ordinati al magazzino, e da questo vengono forniti.
- Il **tempo di riparazione** é quella parte di tempo di manutenzione durante la quale la rottura é riparata o mediante **riparazione in loco**, oppure con **rimozione**, riparazione non in loco e ricollocazione, oppure ancora mediante **rimozione e sostituzione** con pezzo di ricambio.
- Il **tempo di aggiustaggio e calibrazione** é quella parte del tempo di manutenzione durante la quale vengono effettuate le operazioni di aggiustaggio e calibrazione del componente riparato.
- Il **tempo di riassemblaggio** è quello necessario per rimontare la macchina.
- Il **tempo di verifica** é quella parte del tempo di manutenzione durante la quale ci si accerta che l'apparecchiatura riparata funzioni correttamente.
- Il **tempo di pulizia e chiusura** é quella parte di tempo di manutenzione necessario a riassegnare la macchina all'esercizio, in cui cioè la squadra di manutenzione allontana materiali estranei, compie operazioni di pulizia, ecc.

Ovviamente esistono **numerosi fattori** che **influenzano** la **durata totale della riparazione**: alcuni sono **fattori di progetto**, altri di **natura organizzativa**, altri **connessi alla pratica operativa**. Tra i fattori di progetto si possono elencare:

- la complessità del macchinario;
- la configurazione dei componenti;
- il peso dei componenti;
- la modularizzazione dei componenti;
- la miniaturizzazione dei componenti;
- la visibilità dei componenti;
- l’accessibilità dei componenti;
- la standardizzazione dei componenti;
- l’intercambiabilità dei componenti;
- la facilità di smontaggio dei componenti;
- la facilità di rimontaggio dei componenti.

Tra i **fattori di natura organizzativa**:

- l'addestramento della manodopera;

- la direzione della manodopera;
- la disponibilità (dimensionamento) delle squadre;
- l'efficienza del magazzino ricambi;
- la logistica degli impianti e dei servizi ed il grado di decentramento del servizio manutenzione;
- la disponibilità di documentazione (schede macchina, disegni ecc.).

Tra i **fattori operativi** infine si possono citare:

- l’abilita della manodopera;
- gli attrezzi in dotazione;
- gli strumenti di misura in dotazione;
- le procedure per la preparazione del lavoro o per interventi di emergenza.

Nel caso più generale quindi, il **tempo di fuori servizio** di un impianto industriale in un certo periodo risulta dalla **somma** del **tempo** dovuto agli **interventi di manutenzione preventiva** o periodica, e del **tempo dovuto alle operazioni di manutenzione accidentale**, come riportato nella Figura 17. Se allora si indica con:

N_g: il numero delle **operazioni di manutenzione accidentale** nel periodo esaminato.

N_p il numero delle **operazioni di manutenzione preventiva**, nello stesso periodo.

$MTTR_g$ il **tempo medio di riparazione correttiva**.

$MTTR_p$ il **tempo medio per le operazioni di manutenzione preventiva**.

Il **tempo totale di fermata** é dato allora da:

$$MTTR_g \cdot N_g + MTTR_p \cdot N_p$$

I **tempi di riparazione** in seguito a guasto sulla stessa apparecchiatura presentano una **grande variabilità** in relazione alle componenti appena elencate che intervengono. Si parlerà quindi, come per i tempi di guasto, di una **distribuzione di probabilità dei tempi di riparazione t_r**. La **funzione di densità di probabilità** che più generalmente viene usata per la descrizione del fenomeno, è di tipo **lognormale**. L’utilizzo di tale distribuzione non ha alcun **fondamento teorico**, ma si vede come nella maggior parte dei casi permetta di ben **fittare l’andamento dei tempi di riparazione rilevato sperimentalmente**. La funzione di **densità di probabilità dei tempi di riparazione** viene espressa dalla seguente relazione:

$$f(t_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot t_r} \cdot e^{-\frac{(\ln t_r - m)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

dove **m è la media dei logaritmi dei tempi di riparazione**, e **σ^2 la relativa varianza**

$$m = \frac{\sum_i \ln t_{r\,i}}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i \left(\ln t_{r\,i} - m\right)^2}{N-1}$$

La **funzione cumulata F(t_r)** é detta **manutenibilità** ed esprime il valore della probabilità che la riparazione venga portata a termine entro un certo tempo

$$F(t_r) = \int_0^{t_r} f(t_r)\cdot dt_r$$

In particolare allora il **tempo medio di riparazione MTTR** è allora dato da

$$MTTR = \int_0^{\infty} t_r \cdot f(t_r)\cdot dt_r = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(\ln t_r - m)^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot dt_r$$

In Figura 18 vengono riportati gli andamenti per le funzioni densità di probabilità e manutenibilità

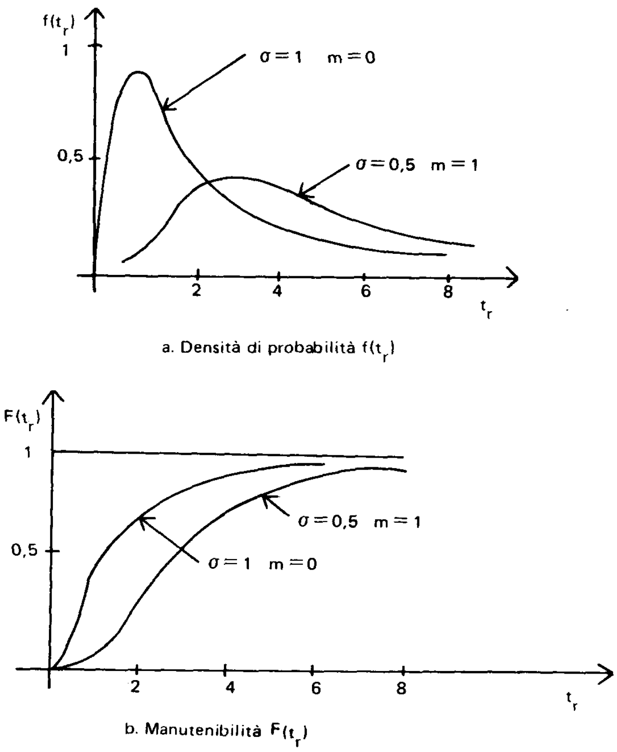

Figura 18: Andamento della funzione densità di probabilità del tempo di riparazione e della manutenibilità

Per la **valutazione pratica della disponibilità dell'impianto**, a causa **dell'estrema aleatorietà del tempo di riparazione e del tempo di funzionamento**, è necessario assumere un **tempo di riferimento sufficientemente ampio.** Si valutano a questo punto i **tempi di funzionamento**, ciascuno di durata $\mathbf{T_i}$, ed i **tempi di riparazione**, ciascuno con durata $\mathbf{t_i}$.
Il **tempo complessivo di funzionamento UT** è dato da:

$$UT = \sum_{i=1}^{N} T_i$$

mentre il **tempo complessivo di fermata per cause tecniche DT** (guasto o manutenzione preventiva) sarà dato da

$$DT = \sum_{i=1}^{N} t_i$$

le sommatorie sono estese agli N intervalli di Up time – Down time considerati
La disponibilità vale

$$D = \frac{UT}{UT + DT} = \frac{\sum_{i=1}^{N} T_i}{\sum_{i=1}^{N} T_i + \sum_{i=1}^{N} t_i}$$

$$D = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} T_i}{N}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} T_i}{N} + \dfrac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N}}$$

$$D = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR}$$

Nel caso di un **apparecchiatura complessa**, il valore del **MTTR** può essere espresso come segue: Se si immagina che l'apparecchiatura sia costituita da **n tipologie di componenti** e che l'apparecchiatura venga riparata nel momento in cui uno dei componenti si guasta (caso a cui ci si può quasi sempre ricondurre, suddividendo opportunamente i componenti l'apparecchiatura), detti $\mathbf{C_i}$ il **numero di componenti** di tipo i-simo, con **tempo di riparazione medio** per il componente di tipo i-simo pari a $\mathbf{t_i}$, e detto $\boldsymbol{\lambda_i}$ **il rateo di guasto del componente di tipo i-simo**, si ha che il MTTR in caso di solo guasto vale

$$MTTR = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \lambda_i \cdot t_i}{\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \lambda_i}$$

dove il termine a denominatore rappresenta il numero di guasti per i componenti di tipo i-simo. Considerando anche k_p **fermate per manutenzione preventiva** di durata media t_p, si ottiene infine

$$MTTR = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \lambda_i \cdot t_i + k_p \cdot t_p}{\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \lambda_i + k_p}$$

5.9 EFFICIENZA DI SISTEMI INDUSTRIALI

Un parametro estremamente significativo, soprattutto nei casi concreti in cui si ha a che fare con impianti caratterizzati non solo da uno stato di buon funzionamento e da uno di guasto, ma anche da **stati intermedi a cui corrispondono funzionamenti parziali,** è il valore **dell'efficienza**. Tale parametro lega la **probabilità** del sistema di trovarsi in uno dei **possibili stati di funzionamento**, alla **quantità di produzione o di servizio reso durante la permanenza in tale stato**. Se si indica con **q_i la produzione** (misurata in unità convenzionali o in termini percentuali rispetto alla massima produzione) legata ad un **generico stato di funzionamento i-simo**, con p_i la **probabilità** che ha il sistema di trovarsi nello stato i-simo, **l'efficienza η** del sistema é data da:

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot q_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i} = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot q_i$$

dove **N é il numero degli stati possibili**. In definitiva **l'efficienza** é la **media pesata** dei servizi resi dal sistema nei suoi possibili stati, essendo **pesi le probabilità di realizzarsi** di **ciascuno stato** di funzionamento.

Se gli **stati possibili fossero due**, sistema funzionante con 100% del servizio reso e sistema guasto con 0% del servizio reso, e la disponibilità del sistema fosse ad esempio pari al 95%, si avrebbe

$$\eta = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot q_i = 0.95 \cdot 1 + 0{,}05 \cdot 0 = 0{,}95$$

Nel caso dunque di sistemi bistabili funzionanti per tutto o per nulla la **disponibilità e l'efficienza coincidono**

5.9.1 ESERCIZIO

Si voglia calcolare l'efficienza dei un sistema di alimentazione di una caldaia, costituito da 4 pompe poste in parallelo, ciascuna in grado di erogare una portata pari al 33% di quella richiesta dalla caldaia, tutte uguali e con disponibilità D=0,9

SVOLGIMENTO

Per la risoluzione del problema è necessario individuare tutti i possibili stati del sistema ed assegnare a ciascuno di essi il relativo valore di percentuale di servizio reso e probabilità di accadimento. Se si suppone che i guasti delle singole pompe siano tra loro indipendenti, la variabile casuale "n° di guasti delle pompe" si può supporre distribuita secondo Bernoulli, ossia

$$P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Quindi

stato	***Caldaie funzionanti***	***Caldaie non funzionanti***	***probabilità***	***Livello di servizio***
1	4	0	$\binom{4}{4} \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}6561$	100%
2	3	1	$\binom{4}{3} \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}2916$	100%
3	2	2	$\binom{4}{2} \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}0486$	66%
4	1	3	$\binom{4}{1} \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}0036$	33%
5	0	4	$\binom{4}{0} \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^4 = 0{,}0001$	0%

E quindi l'efficienza vale

$$\eta = 1 \cdot 0.6561 + 1 \cdot 0.2916 + 0.66 \cdot 0.0486 + 0.33 \cdot 0.036 = 0{,}9810$$