Modelli classici di inventory management

Le scorte nella supply chain industriale

Un classico ed importante problema di gestione industriale è lo **stock management**, o **inventory management**, o **gestione delle scorte**; è un tema che rientra nell'ambito del controllo del flusso dei materiali all'interno di un processo produttivo e va ad impattare su vari settori dell'azienda, condizionandone i rapporti sia con i clienti sia con i fornitori, e quindi le strategie di gestione della supply chain. Si può in generale definire una **scorta** come una certa quantità di un articolo accumulata per essere messa a disposizione di un utilizzatore, affinché questo la consumi secondo necessità. Le scorte sono un serbatoio di compensazione, che permette di creare un collegamento flessibile tra fasi del processo logistico-produttivo situate in sequenza, ma la cui frequenza operativa è diversa. Riguardo al loro peso finanziario, sul Chase si legge testualmente:

> Bisognerebbe considerare le scorte come cumuli di denaro ammassati su carrelli elevatori, scaffali, autocarri e aerei. Le scorte sono proprio questo: denaro. Per molte imprese le scorte sono la voce di bilancio più consistente, anche se non sempre molto liquida. È necessario cercare di ridurre le scorte il più possibile.

Negli USA, ad esempio, è stato valutato che il costo medio delle scorte equivale al 30-35% del loro valore; questi costi sono dovuti a obsolescenze, assicurazioni, costi opportunità e così via. In definitiva, un risparmio dovuto ad una riduzione del livello inventariale medio, a parità di servizio erogato al cliente, si traduce in un consistente aumento di profitto.

Le scorte di materiali possono essere classificate nelle seguenti categorie:

- **Scorte di fornitura**, che possono essere i materiali di cancelleria o gli articoli necessari per effettuare le operazioni di manutenzione. Sono acquistate da fornitori esterni e destinate all'utilizzo nei settori amministrativi, nei reparti di produzione e per le operazioni di manutenzione.

- **Scorte di materie prime**, che fanno parte del ciclo produttivo, vengono acquistate da fornitori esterni e sono destinate alla produzione dove, dopo una serie di trasformazioni fisiche, chimiche o di forma, vengono trasformate in prodotti finiti. Tali prodotti finiti sono immagazzinati in attesa di essere immessi sul mercato o inviati direttamente sul mercato.

- **Scorte di semilavorati**, o **Work In Progress - WIP**, situate fra i diversi reparti di lavorazione e che hanno origine e destinazione nei diversi reparti produttivi.

- **Scorte di prodotti finiti**.

La classificazione dipende dal tipo di azienda in esame: alcuni articoli considerati come prodotti finiti per un'azienda possono essere materie prime o componenti per un'altra, se ad esempio la prima è una fornitrice della seconda.

Le scorte richiedono spesso un luogo deputato a conservarle: il **magazzino**. Dal punto di vista economico-aziendale esso può essere definito come una struttura logistica in grado di ricevere i beni, custodirli, e renderle disponibili per lo smaltimento e la consegna. Esso funge da raccordo fra gli acquisti dell'impresa, i processi di trasformazione e i processi di vendita, e contemporaneamente disaccoppia due segmenti della supply chain, l'approvvigionamento dei componenti e la vendita dei prodotti finiti, dotati di differenti dinamiche. Si possono così garantire,

Figura 1: Il magazzino, una struttura logistica di disaccoppiamento

come spiegato in seguito, la continuità del flusso produttivo, la tempestività nel soddisfacimento dei bisogni della clientela, ed una possibile riduzione dei costi.

Il magazzino e le relative scorte (di cui un esempio è riportato in Figura 1) offrono infatti all'impresa la possibilità di svincolare gli acquisti dei fattori della produzione dalla necessità di un utilizzo immediato. Si pensi ad esempio alla possibilità di acquistare un quantitativo elevato di materie prime, anche a fronte di fabbisogni del processo produttivo ben inferiori, usufruendo in un certo momento di particolari sconti o prezzi sul mercato, e depositare l'eccedenza in magazzino. Spesso, inoltre, vengono ottenuti sconti da parte delle aziende fornitrici quando le quantità che vengono ordinate superano determinati valori.

In presenza di un'elevata domanda di mercato, l'impresa può poi decidere di non sfruttare al massimo gli impianti produttivi, ma di utilizzare parte della produzione precedentemente accumulata nei magazzini. Si ha quindi una stabilizzazione degli impieghi: si impedisce che il personale rimanga inoperoso nei periodi di domanda sotto la media e che si debba assumere personale aggiuntivo o richiedere il lavoro straordinario ai dipendenti nei periodi di domanda elevata.

Grazie alle scorte di WIP si possono ottenere rendimenti di produzione superiori, perché si mantengono parzialmente indipendenti stazioni di lavoro contigue e i guasti di una stazione produttiva non causano la fermata delle stazioni che seguono. Le scorte servono anche per supplire a eventuali problemi di fornitura dei materiali da parte di altre aziende, consentendo un lasso di tempo di sicurezza per cercare di reperire i materiali da altre fonti di approvvigionamento.

Infine è importante che un'azienda riesca sempre a consegnare i prodotti nei tempi e nelle quantità richieste per avere un'immagine positiva e non perdere importanti clienti.

In definitiva, le scorte sono spesso imprescindibili, ma occorre adottare attenti sistemi di gestione per tenerne il livello al minimo indispensabile, al fine di non inficiare le performances aziendali.

Un **sistema di gestione delle scorte** è l'insieme delle politiche e dei controlli che monitorano le quantità a magazzino e stabiliscono quale livello mantenere, quando reintegrarle, e quali dimensioni debbano avere gli ordini.

Le politiche di stock management possono essere di due tipi differenti:

- **A ripristino**: ci si basa fondamentalmente sul livello di giacenza, per cui la scorta ciclo è presente all'interno del sito produttivo indipendentemente dalla necessità della stazione a valle, e quando viene utilizzata da essa, la stazione a monte o il fornitore provvederanno a ripristinare il livello di magazzino esistente (sulla base di una certa politica); le politiche a ripristino sono condizionate dalla domanda, ma indirettamente, attraverso la velocità di consumo delle scorte.

- **A fabbisogno**: si tiene conto anche della previsione di impiego, per cui la scorta è generata solamente nel momento in cui è utile alla stazione a valle; in tale sistema, è la domanda di mercato a determinare direttamente le richieste di produzione e di approvvigionamento di tutti i componenti e semilavorati all'interno del sito produttivo, nei tempi appropriati.

Le politiche a fabbisogno, come il **Material Requiements Planning - MRP**, sono tipiche dei prodotti a domanda dipendente, ovvero quelli che non vengono venduti direttamente, ma sono componenti di un prodotto finito di ordine gerarchico superiore; il presente lavoro verterà invece sulle politiche a ripristino, tipiche dei prodotti finiti a domanda indipendente, soggetta quindi al mercato dei clienti.

I sistemi di gestione delle scorte si ispirano a modelli matematici semplificati che si va ora a presentare.

I tipici modelli di gestione delle scorte a ripristino per un'industria sono quelli **multiperiodali**, ovvero con ordinazione ripetuta di quantità inferiori a quelle necessarie a coprire le necessità dell'intero esercizio annuale. Questi sono progettati per assicurare la costante disponibilità di un articolo nel corso dell'anno, e per emettere ordini in tempi e quantità ottimali, calcolati dal modello stesso. Le famiglie di modelli a periodo multiplo sono due: quella del **modello a intervallo di tempo fisso**, o **modello P** e quella del **modello a quantità d'ordine fissa**, o **modello Q**, o **Economic Order Quantity - EOQ**.

- Nei modelli P si esegue un controllo periodico a periodo fisso delle scorte disponibili e quindi si emette un ordine che ripristini la scorta massima che si desidera. Il riordino avviene in quantità non note a priori, ma in istanti determinati a priori.

- Nei modelli Q viene fissato un livello di scorte disponibili raggiunto il quale occorre effettuare un ordine che sarà sempre della stessa quantità. Il livello di scorte è il **punto** o **livello di riordino**. Il riordino avviene quindi in lotti noti a priori, ma in istanti non noti a priori.

Tutti i modelli si basano sulla gestione delle **scorte disponibili**. Le scorte disponibili di un codice di magazzino si calcolano come:

$$scortedisponibili = giacenzafisica + ordinato - impegnato \tag{1}$$

dove l'ordinato sono gli articoli non ancora in giacenza ma la cui produzione è già stata ordinata al fornitore, quindi è una sorta di magazzino potenziale; l'impegnato sono gli articoli fisicamente presenti in magazzino, ma indisponibili in quanto già assegnati ad un cliente.

La differenza fondamentale tra le due famiglie di modelli è che i primi (**periodic review**) sono attivati dal tempo, i secondi sono attivati da un evento (il raggiungimento del valore di soglia di giacenza), e il verificarsi di questo evento dipende dalla domanda. I modelli a quantità d'ordine fissa richiedono quindi il monitoraggio continuo delle scorte (**continuous review**), ovvero ad ogni movimento di magazzino il database con le giacenze deve essere aggiornato. Grazie a questo procedimento, però, proteggono maggiormente dalle rotture di stock, come si può intuire dal fatto che sono sensibili alla domanda e quindi al tasso di consumo delle scorte, a differenza dei modelli dell'altra famiglia. Sono dunque i più frequentemente seguiti nella pratica, e nel resto del presente lavoro si tratterà solamente la famiglia di modelli EOQ, a partire dal caso base ed estendendo poi l'analisi al modello che tien conto dell'aleatorietà di alcuni input.

EOQ: modello deterministico

Il **modello EOQ deterministico**, detto anche **di Harris - Wilson** e risalente agli albori dell'approccio matematico alla gestione industriale (ormai un secolo fa), mira a minimizzare la funzione costi che deriva dalla somma dei costi di acquisto, di emissione di un ordine e di mantenimento a scorta di un singolo codice di prodotto, basandosi su alcune ipotesi semplificative.

Queste ipotesi sono:

1. Domanda nota e costante nel tempo;

2. Prezzo unitario di acquisto costante per ogni dimensione del lotto ordinato e nel periodo considerato;
3. Lead time di riordino noto e costante;
4. Costi di stoccaggio unitari costanti;
5. L'ordine emesso è stato inserito a scorta non appena é stato ricevuto;
6. Non si considera la possibilità di avere rotture di stock;
7. Possono essere trasportati lotti di qualunque dimensione senza che questo influenzi i costi di trasporto;
8. L'ordine emesso può essere di dimensione qualunque.

Dove per **lead time** si intende il tempo che intercorre tra il momento di emissione dell'ordine al fornitore e il momento in cui il lotto di reintegro entra in giacenza.

Occorre sempre tenere in considerazione queste ipotesi, peraltro molto restrittive, perché queste sono i limiti oltre i quali questa teoria non è più valida. L'andamento del livello inventariale nel tempo $Q(t)$, cosiddetto a pettine, si può rappresentare come in Figura 2.

Sotto queste ipotesi, l'espressione dei costi totali è la seguente:

$$C_{tot} = C_{acq} + C_{or} + C_{stoc} = pD + \frac{Dc_0}{Q} + \frac{Q\hat{c}_s p}{2} \tag{2}$$

Dove il significato dei termini è:

- C_{tot} = costi totali annui di stock management [€/anno];
- Q = lotto di acquisto [u];
- p = prezzo d'acquisto del prodotto [€/u];
- D = domanda annua del prodotto [u/anno];

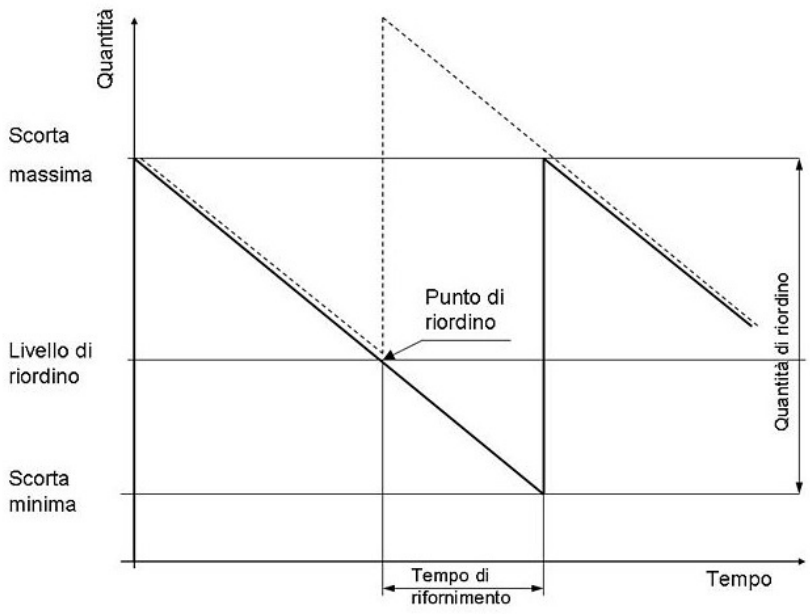

Figura 2: Scorte in funzione del tempo per domanda costante

- c_0 = costo del lancio ordine [€];
- $\hat{c}_s$ = costo annuo di mantenimento a scorta calcolato come percentuale del prezzo di acquisto [1/anno].

Come si può notare, ad un termine costante si aggiunge un contributo inversamente proporzionale a Q ed uno lineare in Q. Infatti all'aumentare della dimensione del lotto di acquisto diminuiscono i costi d'ordine perché è minore il numero di volte in cui l'ordine stesso deve essere replicato, mentre aumentano i costi di mantenimento a scorta (terzo termine) a causa del livello inventariale medio più elevato. Si può infatti facilmente dedurre che il livello inventariale medio, sotto l'ipotesi di domanda costante e supponendo di finire le scorte esattamente all'arrivo del nuovo lotto, è pari a $Q/2$. I due contributi funzione di Q daranno quindi origine ad un punto di minimo della funzione costi totali: il lotto economico d'acquisto o economic order quantity - EOQ. Derivando rispetto a Q e ponendo uguale a zero il risultato, si ottiene la seguente espressione per Q_{ott}:

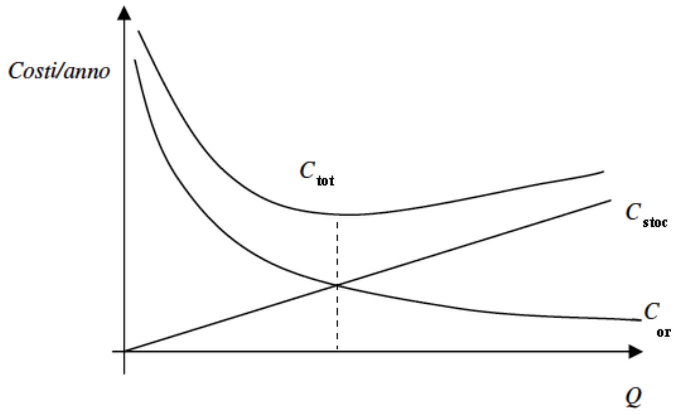

Figura 3: Curve di costo in funzione della quantità di riordino

$$Q_{ott} = EOQ = \sqrt{\frac{2Dc_0}{\hat{c}_s p}} \tag{3}$$

Gli andamenti dei contributi di costo $C_{or}(Q)$ e $C_{stoc}(Q)$, e dei costi totali $C_{tot}(Q)$, sono qualitativamente graficati in Figura 3.

Il punto di riordino B è calcolato supponendo un andamento lineare decrescente del livello inventariale, che parte da B all'istante di emissione dell'ordine per arrivare al livello minimo (idealmente, zero) alla fine del lead time. L'espressione del livello di riordino è dunque (indicando con Lt il lead time di riordino precedentemente definito):

$$B = DLt \tag{4}$$

Si vuole procedere ora alla trattazione del modello stocastico, su cui la presente tesi è incentrata; è utile però richiamare prima alcuni concetti di statistica in esso utilizzati.

Richiami di statistica

La statistica descrittiva cerca di trarre informazioni sintetiche e generalizzabili da popolazioni sperimentali molto ampie. Si fa, a questo fine, uso di alcuni indicatori numerici; si presentano qui quelli molto usati di **media** e **deviazione standard**. Supponendo di avere un insieme di n osservazioni sperimentali i, che assumono valori x_i su una scala x, la media aritmetica μ e la deviazione standard σ della popolazione sono calcolabili come segue:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{5}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}} \tag{6}$$

Di uso frequente è anche il quadrato della deviazione standard, σ^2, detto **varianza**.

Si definisce poi **coefficiente di variazione - CV** di una distribuzione di dati sperimentali il rapporto tra deviazione standard e media, che assume valori compresi tra 0 e 1, e fornisce un'indicazione della variabilità delle osservazioni rilevate:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \tag{7}$$

A parità di altre condizioni, quanto più alto è CV, tanto meno significativo è l'uso della media aritmetica per definire sinteticamente una distribuzione.

Si definisce **frequenza relativa** di un determinato valore X della scala x il rapporto tra le n_X osservazioni che hanno tale valore e le n osservazioni totali. Andando a graficare la frequenza relativa per ogni X si ottiene una distribuzione di frequenza. Se poi la scala x è continua, per n molto grandi la frequenza relativa di ogni X reale sarà non nulla: si ha una distribuzione di frequenza continua, esprimibile attraverso una funzione $f(x)$.

Associando infine le distribuzioni di frequenza alle distribuzioni di probabilità si va nel campo della statistica inferenziale, che si occupa di formulare previsioni attendibili su qualche fenomeno sulla base di un suo campionamento o andamento storico: una variabile casuale x può essere descritta in termini della sua **funzione distribuzione di probabilità** $f(x)$.

Media e varianza di una funzione distribuzione di probabilità godono della **proprietà di linearità**; pertanto, se x e y sono due variabili casuali qualsiasi distribuite con medie μ_x e μ_y, e varianze σ_x^2 e σ_y^2, la distribuzione $x+y$ avrà media $(\mu_x + \mu_y)$ e varianza $(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)$.

La distribuzione normale

La **distribuzione normale**, o **di Gauss**, è una funzione $f(x)$ continua di distribuzione di probabilità, di una sola variabile casuale continua x. Storicamente è nata come distribuzione di frequenza, dall'osservazione delle misurazioni ripetute di un fenomeno fisico: una cospicua parte dei risultati sperimentali su vari fenomeni naturali (biomedici, antropometrici, fisici e così via) tende infatti, per popolazioni molto ampie, ad assumere tale forma. Il grafico della funzione densità di probabilità associata è a forma di campana, nota appunto come campana di Gauss, come si può vedere in Figura 4.

L'espressione analitica della funzione densità di probabilità $f(x)$ è:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{8}$$

con $-\infty < x < \infty$.

I termini μ e σ sono rispettivamente la media e la deviazione standard, i due gradi di libertà su posizione e forma di una distribuzione normale: al variare di μ la curva si sposta infatti sull'asse delle ascisse, al crescere di σ si appiattisce. Date μ e σ, una distribuzione normale, indicabile sinteticamente come $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$ è univocamente identificata: esistono pertanto ∞^2 possibili distribuzioni normali.

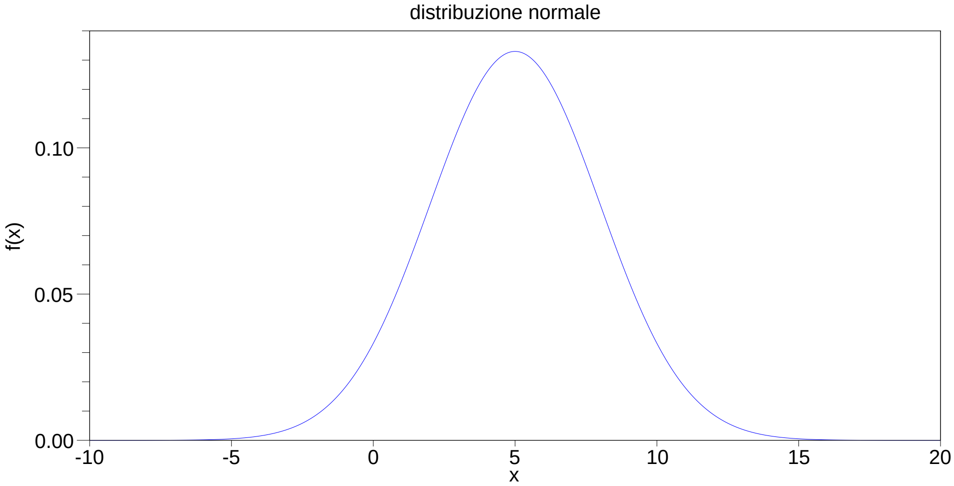

Figura 4: Distribuzione normale con $\mu = 5$ e $\sigma = 3$

Trattandosi di una funzione distribuzione di probabilità, l'area compresa tra la curva e l'asse delle ascisse deve sempre essere unitaria: si comprende quindi come all'appiattimento della curva corrisponda una minor altezza, ovvero una minor densità di probabilità intorno al valor medio, indice di una maggior dispersione sperimentale.

Per trovare la probabilità associata ad un certo valore di x occorre integrare l'Eq. 8 da $-\infty$ a x. Si ottiene un sottinsieme dell'area unitaria, quindi un valore numerico compreso tra 0 e 1, che rappresenta la probabilità che l'i-sima osservazione assuma un valore x_i non superiore ad x. Questa integrazione non è certo agevole, per cui si fa spesso ricorso alla cosiddetta **distribuzione normale standardizzata** che consente di individuare la porzione di area (quindi la probabilità) tra due valori qualsiasi di x mediante apposite tabelle. Essa si ottiene con la seguente trasformazione lineare:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \tag{9}$$

Il grande vantaggio è il fatto che per come è ottenuta ha sempre $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, ed esiste quindi una sola distribuzione standardizzata a fronte delle ∞^2

distribuzioni normali non standardizzate.

Il **Teorema del limite centrale** afferma che la somma di n variabili casuali x_j indipendenti e identicamente distribuite, con media μ e varianza σ^2 finite, indipendentemente dalla forma della distribuzione di partenza tende a una distribuzione normale al tendere di n all'infinito, che ha per media la somma delle medie e per varianza la somma delle varianze. In simboli:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j \simeq N(n\mu, n\sigma^2) \tag{10}$$

Grazie a questo teorema, la distribuzione normale si incontra spesso nelle applicazioni pratiche come un semplice modello per fenomeni complessi.

Altre notevoli distribuzioni

Si è visto come la distribuzione normale goda di peculiarità che la rendono il caso di riferimento su cui è peraltro costruita la teoria del modello EOQ a domanda e lead time stocastici. Si richiamano ora brevemente le proprietà di altre due tipologie di distribuzione di probabilità, quella uniforme e quella esponenziale, che non sono utilizzate dalla teoria classica ma saranno parte di questo lavoro.

La **distribuzione uniforme** è una funzione $f_u(x)$ continua di distribuzione di probabilità, di una sola variabile casuale continua x. Come si può notare dalla Figura 5, è una funzione costante a tratti, che come tutte le disribuzioni di probabilità racchiude un'area unitaria. A differenza della distribuzione normale, però, assume valori divesi da zero solo in un intervallo $[a, b]$ sull'asse delle ascisse. La sua definizione è infatti:

$$f_u(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{se } a \leq\ x \leq\ b \\ 0 & \text{se } x < a\ \vee\ x > b \end{cases} \tag{11}$$

Si tratta di una distribuzione simmetrica, centrata attorno al valore medio $(a + b)/2$. La funzione è univocamente determinata dai valori di a e b. Risulta

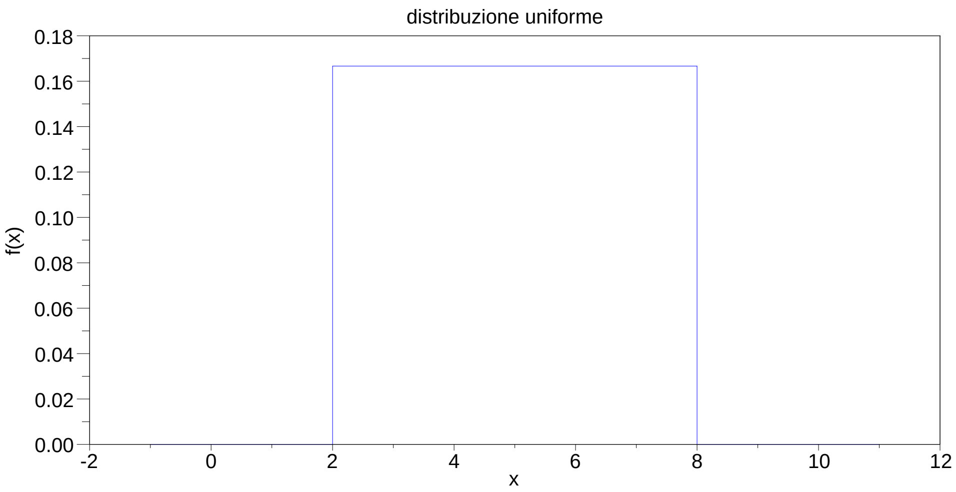

Figura 5: Distribuzione uniforme con media = 5 e $b - a = 6$

utile per descrivere fenomeni che assumono valori solo in un intervallo, all'interno del quale però ogni valore è considerabile equiprobabile agli altri.

La **distribuzione esponenziale** è una funzione $f_e(x)$ continua di distribuzione di probabilità, di una sola variabile casuale continua x, di cui un esempio è riportato in Figura 6 e definita dalla seguente funzione densità di probabilità:

$$f_e(x) = \lambda \exp\left(-\lambda\ x\right) \tag{12}$$

La sua media è $1/\lambda$, la sua varianza $1/\lambda^2$. Questi due parametri, quindi, in questa distribuzione non sono indipendenti, in quanto legati dal parametro λ. Si ha pertanto un solo grado di libertà nella definizione di una distribuzione esponenziale, contro i due possibili per la normale e per l'uniforme. Risulta utile per descrivere fenomeni che presentano probabilità o frequenza che diminuisce esponenzialmente in modo monotono al crescere dei valori assunti; il valore 0 è sempre di massimo per $f_e(x)$.

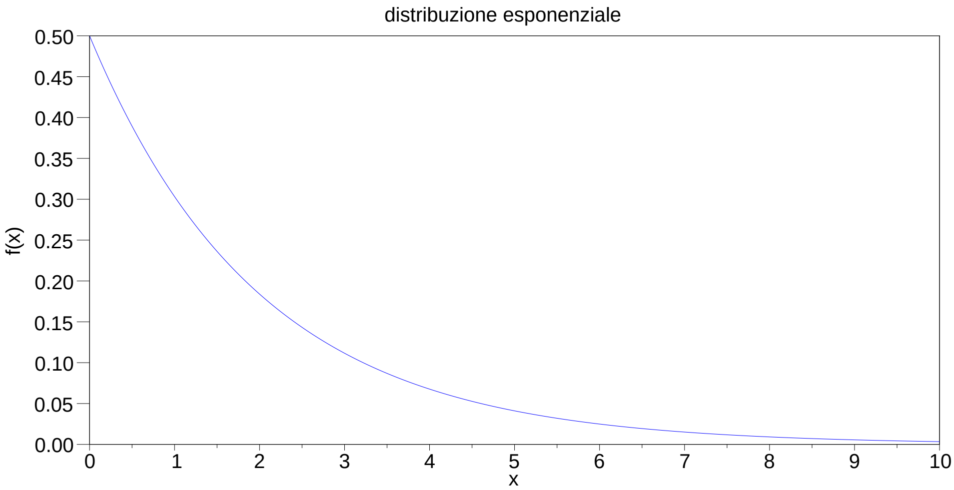

Figura 6: Distribuzione esponenziale con $\lambda = 0.5$

EOQ: modello stocastico

Si è detto nel Par. che le ipotesi del modello classico del lotto economico di riordino sono molteplici e restrittive. Una delle più pesanti è senza dubbio quella che vuole la domanda D (e il lead time Lt) come quantità note e costanti. In realtà, nella stragrande maggioranza dei settori merceologici la domanda è intrinsecamente una variabile stocastica, caratterizzata da fluttuazioni studiabili solo con approccio statistico. Inoltre si può avere, a causa di svariati fattori, anche un'incertezza sul lead time di riordino; ad esempio, basta che l'azienda fornitrice abbia avuto qualche guasto durante la produzione per allungare in modo inaccettabile l'attesa del quantitativo ordinato, e generare frattanto indesiderate **rotture di stock** (o **sottoscorta**, o **stockout**), ovvero giacenza disponibile insufficiente a coprire la domanda.

Se si tien conto dell'aleatorietà di domanda e lead time, nasce l'esigenza di considerare un livello inventariale che faccia fronte ad eventuali picchi di richiesta o attesa, garantendo un certo livello di protezione contro lo stockout: è necessaria una quantità inventariale aggiuntiva detta **scorte di sicurezza** o **safety stock**, che mediamente resterà a magazzino per tutto l'orizzonte di programmazione.

Le scorte di sicurezza possono essere quantificate in base a differenti criteri: molto diffuso è l'approccio che considera di aumentare la giacenza di ogni articolo di un quantitativo pari alla copertura di un certo numero di settimane per l'articolo stesso; più corretto appare però un approccio probabilistico, sensibile alla variabilità della domanda, come quello che si è adottato in questo lavoro.

Si passa quindi ad una modellazione EOQ che spesso risulta più realistica: il **modello EOQ stocastico**.

La differenza fondamentale tra un modello a quantità fissa con domanda nota e il corrispondente a domanda incerta risiede nella modalità di calcolo del punto di riordino. La quantità dell'ordine è invece uguale nei due casi.

Come si può intuire, le scorte di sicurezza generano costi di stoccaggio aggiuntivi a quelli del modello deterministico, peggiorandone così le performances in termini di bilancio aziendale: come in moltissimi problemi dell'ingegneria, si ha a che fare con un trade off tra livello di servizio voluto, ovvero **customer satisfaction** considerabile come **efficacia** da una parte, e costi da sostenere, e quindi **efficienza**, dall'altra.

Il metodo probabilistico per il calcolo delle scorte di sicurezza prevede innanzitutto di fissare il **livello di servizio** desiderato, ovvero la probabilità di non avere rottura di stock in un certo periodo. Essendo $f(x)$ la funzione densità di probabilità relativa alla domanda attesa in un determinato periodo di tempo, il livello di servizio Ls si può esprimere come:

$$Ls = \int_0^{S_0} f(x)dx \tag{13}$$

ovvero, come si è visto nel Par. , il valore di Ls è sempre compreso tra 0 e 1 e rappresenta la probabilità che la domanda nel periodo di riferimento non superi il valore S_0.

Le ipotesi su cui si basa il metodo sono le seguenti:

1. La distribuzione di probabilità della domanda di ogni periodo è modellabile con una distribuzione normale;

2. Si possono ritenere indipendenti tra loro le domande in periodi diversi.

Soprattutto la prima ipotesi in realtà perde spesso di validità, soprattutto quando si considerano periodi brevi con domande fortemente concentrate e discontinue:

Riguardo a quale sia la finestra temporale su cui calcolare media e deviazione standard della domanda, occorre considerare il periodo di tempo di impossibilità di controllo delle scorte, perché è in tale periodo che si definisce la domanda come una funzione densità di probabilità, ha interesse la sua variabilità e si genera il pericolo di sottoscorta. Nel caso del modello EOQ si fa quindi riferimento all'arco temporale del lead time di riordino. Fino all'emissione dell'ordine di approvvigionamento di EOQ, infatti, la giacenza Q è nota, dato che i modelli a quantità fissa presuppongono un controllo inventariale continuo. Si assume quindi la durata media del lead time, Lt, come periodo di riferimento.

Note media μ e deviazione standard σ della domanda in un periodo di durata T qualsiasi (calcolabili sulla base dello storico mediante le Eqq. 5 e 6 presentate al Par.), se le due ipotesi appena riportate sono verificate, è possibile ricavare le seguenti espressioni per D_{med} e σ_d, rispettivamente la media e la deviazione standard della domanda nel periodo Lt.

$$D_{med} = \mu \frac{Lt}{T} \tag{14}$$

$$\sigma_d = \sigma \sqrt{\frac{Lt}{T}} \tag{15}$$

I parametri trovati sono la media e la deviazione standard della somma di Lt/T (in genere un numero intero > 1, se T è su base giornaliera) distribuzioni diverse, calcolati applicando le proprietà di linearità viste al Par. .

La distribuzione della domanda utilizzata per il calcolo è in realtà una previsione del consumo di scorte atteso nel periodo di riferimento, calcolata secondo

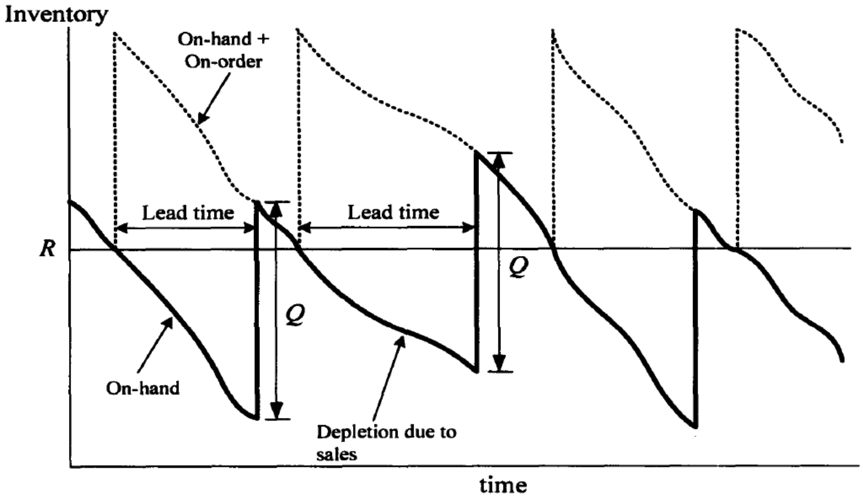

Figura 7: Scorte in funzione del tempo per domanda stocasticamente variabile

una serie storica che tiene conto della domanda effettiva nei periodi precedenti: in questo sta la sensibilità del modello probabilistico alle variazioni di domanda.

Nel caso generale di domanda D e lead time Lt entrambi stocastici l'espressione del punto di riordino è:

$$B = D_{med}Lt_{med} + SS \tag{16}$$

Si riporta il tipico andamento delle scorte del modello stocastico, notare che la pendenza dei tratti inclinati (ovvero il tasso di consumo delle scorte, in ultima analisi la domanda) non è più costante.

Fissando un livello di servizio α e trovando il valore della funzione normale standardizzata corrispondente z_α (che rappresenta il numero di deviazioni standard prese in considerazione per il calcolo delle safety stock), si ottiene la seguente espressione per le scorte di sicurezza, SS:

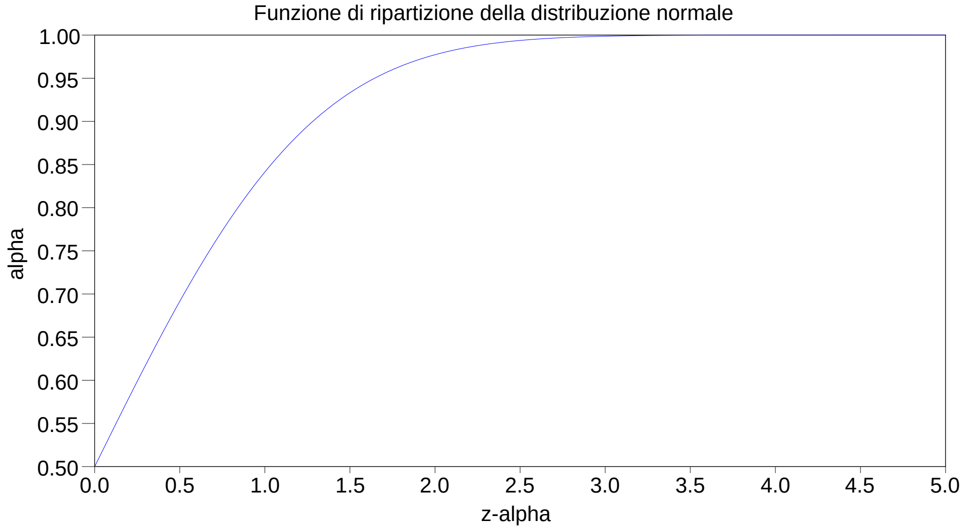

Figura 8: Curva $\alpha(z_\alpha)$

$$SS = z_\alpha \sqrt{Lt_{med}\sigma_d^2 + D_{med}^2\sigma_{Lt}^2} \tag{17}$$

Il valore di z_α si può trovare in tabella, oppure valutare graficamente secondo la Figura 8.

Se uno dei due tra domanda e lead time è deterministico, la corrispondente deviazione standard è zero. Se entrambi sono deterministici, quindi, l'intero termine SS si annulla e si ritrova l'espressione del punto di riordino dell'Eq. 4. L'assenza totale di scorta di sicurezza in presenza di domanda stocastica comporta $Ls = 50\%$. Si nota inoltre come all'aumentare del livello di servizio imposto aumenti, anche se non linearmente, z_α e con essa SS e i relativi costi di mantenimento a scorta.

Per quanto riguarda invece il quantitativo da riordinare, come anticipato, non cambia rispetto al caso deterministico (Eq. 3); semplicemente al valore puntuale D viene qui sostituita la media D_{med} della funzione distribuzione della variabile casuale domanda:

$$EOQ_{stocastico} = \sqrt{\frac{2D_{med}c_0}{\hat{c}_s p}} \tag{18}$$

E questo indica che semplicemente il grafico $Q(t)$ è divenuto più irregolare ed è stato traslato verso l'alto di una quantità pari a SS, ma il numero di picchi e valli in un anno rimane mediamente invariato.

È importante sottolineare che questo modello considera solo la probabilità di andare in stockout, ma non informa relativamente al numero di unità mancanti.

Si può riassumere in conclusione il procedimento periodico della gestione secondo il modello EOQ, sia esso deterministico o stocastico, nel diagramma di flusso di Figura 9 e nel seguente estratto da Kang.

> *In the (Q,R) policy, the inventory is monitored continuously*[1] *and an order of fixed quantity Q is placed to the supplier if the sum of inventory on-hand (quantity in the facility available for sale) and on-order (quantity ordered to the supplier and waiting to be received and made ready for sale) is less than or equal to the reorder point R. The time between placing an order and its arrival is called lead time. The reorder point is set so that when an order is placed, enough inventory exists in the facility to meet the demand until the order arrives. Thus the reorder point has a critical bearing on the performance of this policy. If it is set too low, inventory will be depleted frequently and out-of-stocks will occur. If it is set too high, then the facility will be carrying unnecessary inventory. The reorder point is often explained as consisting of two parts: the expected value of total demand during lead time and safety stock. If the demand is known and constant, then setting the reorder point equal to the total expected demand during lead time would ensure that all demand would be satisfied. However, if there is randomness in the system - such as in the demand or supplier lead time - then the*

[1] In practice, monitoring is often done daily.

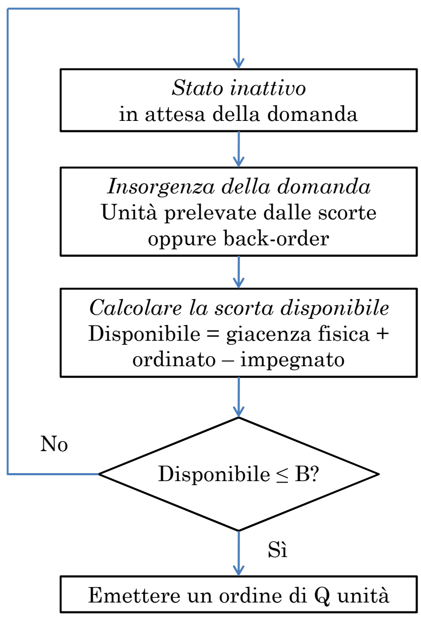

Figura 9: Flowchart per la gestione del riordino secondo il modello EOQ

reorder point will have to be higher to cover the uncertainties. This extra inventory is safety stock.