

Progettazione e analisi degli esperimenti

Sperimentazione con approccio statistico

Un piano sperimentale progettato, ovvero eseguire prove secondo una logica coerente, si rende necessario per un efficace utilizzo delle risorse di tempo e calcolo disponibili. Si fornisce pertanto in questo Capitolo un'introduzione alle tecniche di design of experiments, strumento estremamente potente e trasversale ai vari campi di indagine tecnico-scientifica, e alle tecniche di manipolazione dei risultati sperimentali nate per condurre ad un miglioramento del sistema. Citando Montgomery,

Experiments are performed in almost any field of enquiry and are used to study the performance of processes and systems. [...] The process is a combination of machines, methods, people and other resources that transforms some input into an output that has one or more observable responses. Some of the process variables are controllable, whereas other variables are uncontrollable, although they may be controllable for the purpose of a test. The objectives of the experiment include: determining which variables are most influential on the response, determining where to set the influential controllable variables so that the response is almost always near the desired optimal value, so that the variability in the response is small, so that the effects of uncontrollable variables are minimized.

Da cui si evince che lo scopo degli esperimenti sono le seguenti tre fasi, la prima prodromica alle altre:

1. **Caratterizzazione del problema**, per trovare i parametri di input che più significativamente influenzano l'output;
2. **Ottimizzazione del problema**, ovvero agire su quelle variabili trovate al punto 1 per determinarne la regione di ottimo, quella a cui corrisponde un output più favorevole.
3. **Progettazione robusta** o **Robust Design Analysis - RDA**: un problema ingegneristico molto importante è la redazione di piani sperimentali statistici per la progettazione di prodotti robusti, ovvero insensibili alle variazioni di parametri operativi.

In ogni esperimento i risultati e le conclusioni ottenute dipendono in larga misura dal modo in cui i dati sono stati raccolti. Con modelli multi input e multi output, progettare gli esperimenti diviene fondamentale.

Il **Design Of Experiments - DOE** è un modo di scegliere esempi nello spazio di progettazione al fine di ottenere il massimo di informazioni usando il minimo di risorse, ovvero con un minor numero di esempi. Dato che ogni esempio implica tempo per prove sperimentali o risorse di cpu allocate alla simulazione numerica, è ragionevole provare a limitare lo sforzo richiesto. Naturalmente, minore è il numero di casi e più incomplete ed inaccurate saranno le informazioni raccolte alla fine. Dato un set di esempi, ci sono vari modi di scegliere un samples arrangement ottimale per ottenere differenti informazioni.

L'approccio statistico alla progettazione sperimentale è necessario, se si vogliono ricavare conclusioni sensate dai dati, qualora questi siano soggetti ad errori e/o a stocasticità dei valori di ingresso. Quando il problema coinvolge dati soggetti a errori sperimentali, la metodologia statistica rappresenta l'unico approccio oggettivo all'analisi. Vi sono pertanto due aspetti relativi ad un generico problema sperimentale:

- pianificazione dell'esperimento;
- analisi dei dati.

Una flowchart della pianificazione sperimentale può essere la seguente:

1. Identificazione e formulazione del problema;
2. Scelta dei fattori, livelli ed intervalli;
3. Selezione della variabile di risposta;
4. Scelta del piano sperimentale;
5. Esecuzione dell'esperimento;
6. Analisi statistica dei dati;
7. Conclusioni.

Una progettazione di un piano sperimentale deve seguire i tre principi di base per avere attendibilità statistica:

- **Replicazione**, ovvero la ripetizione dell'esperimento in corrispondenza dello stesso set di dati di ingresso, per ottenere un risultato più preciso (media campionaria) e stimare l'errore sperimentale (deviazione standard campionaria).
- **Casualizzazione**, ovvero realizzare in ordine random gli esperimenti, per svincolare le condizioni di un run da quelle dei run precedenti e successivi ed evitare così l'introduzione di errori sistematici;
- **Esecuzione a blocchi**, ovvero raggruppare esperimenti svolti con fattori esterni simili, per ridurre le sorgenti di variabilità e migliorare la precisione.

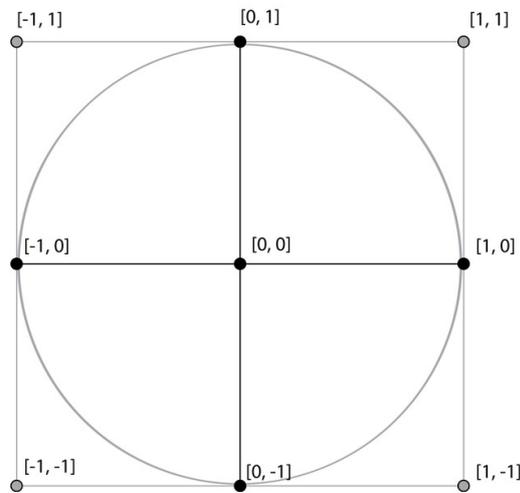


Figura 1: Strategia un-fattore-alla-volta (cerchio)

DOE: alcuni piani sperimentali

Esposto il metodo statistico generale, da adottare qualsiasi sia la tecnica di sperimentazione adottata, si vanno ora a presentare i principali piani sperimentali più diffusi.

A parte la strategia di sperimentazione a tentativi, evidentemente frutto di un approccio non matematico al problema, è molto diffusa nella pratica la strategia un-fattore-alla-volta (o **One factor At a Time - OAT**). Questo metodo consiste nello scegliere un valore iniziale, o insieme di livelli di base, per ciascun fattore; quindi far variare in successione i livelli di ciascun fattore nel proprio campo di variazione, mantenendo gli altri fattori costanti al loro livello base o centrale (Figura 1).

Uno svantaggio di questa strategia è il lasciare inesplorata una regione di spazio che nel caso di 2 fattori rappresentato in Figura 1 è ancora percentualmente modesto (sono le aree ai 4 angoli del quadrato, comprese nel quadrato ma fuori dal cerchio), ma che cresce molto rapidamente all'aumentare delle dimensioni. Il maggiore contro di questo metodo è che non riesce a tener conto di possibili interazioni tra i fattori, che sono spesso presenti ed in quei casi la strategia un-fattore-alla-

volta darà risultati scadenti. Questo è un aspetto trascurato, per cui questo tipo di esperimenti, benché fallace in molti casi, è spesso eseguito in pratica. Metodi più efficienti e raffinati sono quelli di seguito esposti; prima occorrono però alcune definizioni.

Si definisce **effetto principale** di un singolo fattore la differenza tra i valori assunti dalla variabile di risposta y a differenti livelli del fattore stesso. Con riferimento al fattore a in Figura 2, ad esempio, l'effetto principale (o **main**) di a , M_a , é la differenza tra la media di y sulla faccia definita dai 4 vertici a valore A (valore superiore per il parametro a), e la media di y sulla faccia opposta, definita dai 4 vertici a valore inferiore di a . In simboli:

$$M_a = \frac{y_A + y_{AB} + y_{AC} + y_{ABC}}{4} - \frac{y_I + y_B + y_C + y_{BC}}{4} \quad (1)$$

e naturalmente espressioni analoghe valgono per gli effetti principali dei fattori b e c .

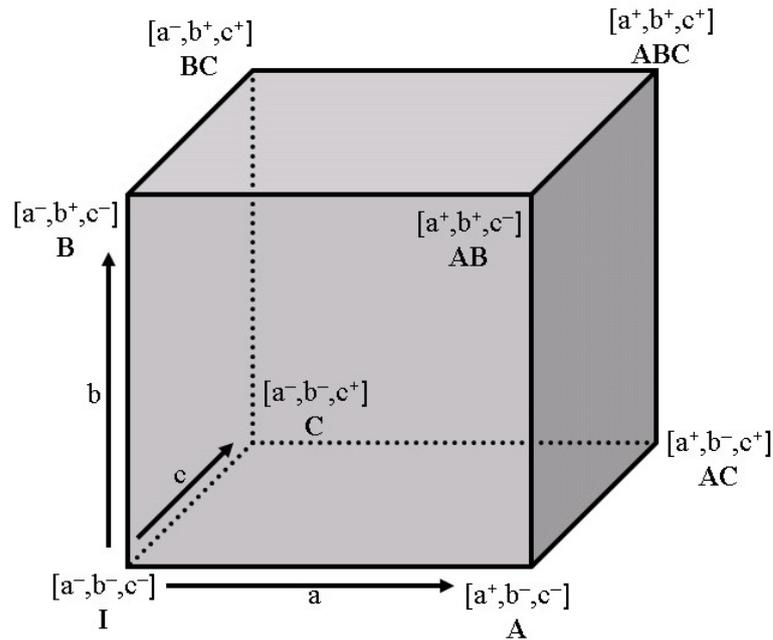
Si definisce **interazione** tra 2 o più fattori la differenza tra i valori assunti dalla variabile di risposta y a valori incrociati tra superiori e inferiori di quei fattori. Sempre con riferimento alla Figura 2, l'interazione tra i fattori a e b , M_{ab} , può scriversi come:

$$M_{ab} = \frac{y_I + y_C + y_{AB} + y_{ABC}}{4} - \frac{y_A + y_{AC} + y_B + y_{BC}}{4} \quad (2)$$

L'**ordine** di un'interazione tra f fattori è $f-1$.

Piano fattoriale completo

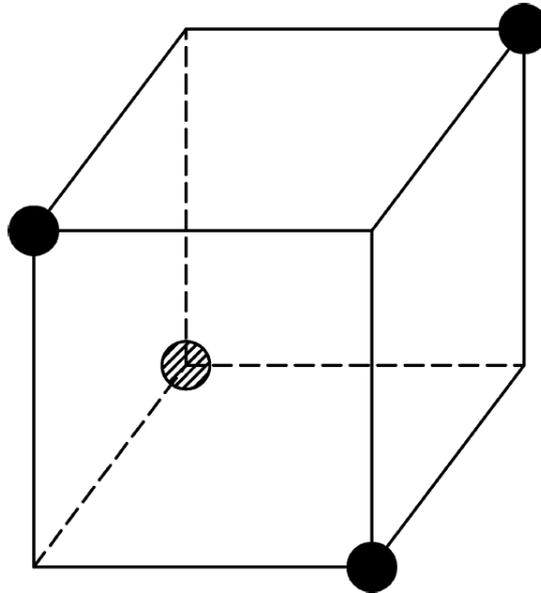
Un valido approccio, per condurre esperimenti con più fattori, consiste nel realizzare un **piano fattoriale** degli esperimenti, secondo una strategia sperimentale in cui i fattori variano congiuntamente anziché uno alla volta. Una caratteristica molto importante degli esperimenti fattoriali è l'uso estremamente efficiente dei dati sperimentali. Si può peraltro dimostrare che essi sono in assoluto i progetti


 Figura 2: Piano fattoriale completo 2^3

più efficienti per l'analisi di due o più fattori. In generale, quando tutti i fattori vengono indagati con lo stesso numero di livelli, si parla di una famiglia di piani fattoriali a L livelli e k fattori, L^k , dove L^k è anche il numero di prove richieste per una caratterizzazione completa del sistema. Un piano fattoriale si dice completo (**full factorial**) quando si utilizzano tutte le possibili combinazioni dei livelli dei fattori. Se $L = 2$, per $k = 2$ o $k = 3$ il piano fattoriale può essere rappresentato geometricamente in uno spazio euclideo, rispettivamente come un quadrato o cubo; per $k > 3$, come un ipercubo in uno spazio k -dimensionale. In figura si riporta a titolo di esempio la struttura di un piano fattoriale completo a 3 fattori: a, b, c , ciascuno dei quali su 2 livelli: $-$ e $+$.

Piano fattoriale frazionario

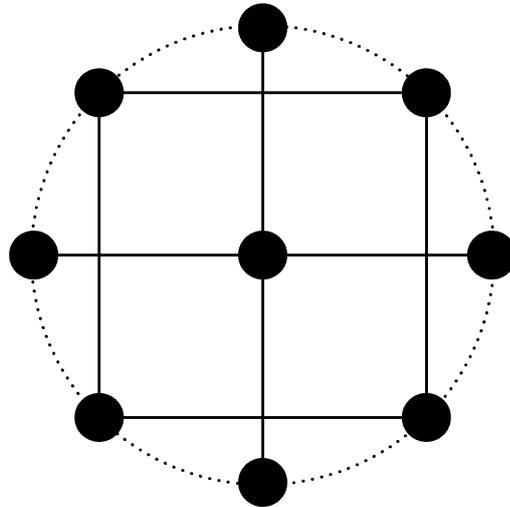
Come si può intuire, all'aumentare del numero di fattori coinvolti, il numero di punti cresce esponenzialmente e può non essere sostenibile il numero di prove necessario. Viene in aiuto in questi casi il **piano fattoriale frazionario** o **fractional**

Figura 3: Piano fattoriale frazionario 2^{3-1}

factorial, ovvero una variazione del piano fattoriale di base in cui si esegue solo un sottoinsieme di prove del set full factorial corrispondente, come si può vedere nell'esempio di Figura 3.

Piano composito centrale

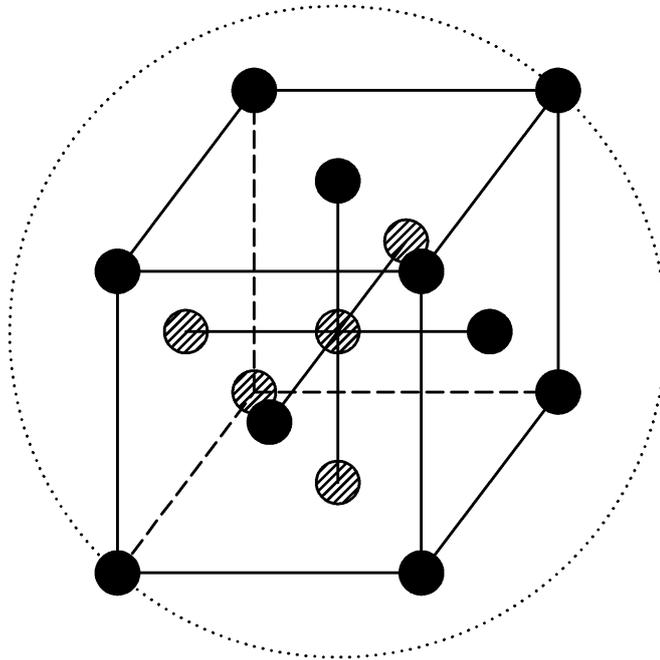
Un esperimento progettato secondo un **piano composito centrale** è un full factorial 2^k al quale sono stati aggiunti il punto centrale e gli **star points**. Questi ultimi sono dei punti di campionamento in cui tutti i parametri a parte uno sono settati sul loro valore medio (che per un piano 2^k , ad esempio, può corrispondere al valore intermedio a quelli su cui si calcola il full factorial associato). Il valore del parametro rimanente è espresso in termini di distanza dal punto centrale. Esistono varie tipologie di piani centrali composti, a seconda di dove si collocano gli star points rispetto ai punti del fattoriale. Se gli star points stanno nello spazio alla stessa distanza dal centro dei punti del fattoriale, il livello del fattore non centrale di ogni star point avrà differenza dal livello centrale scalata di un fattore \sqrt{k} rispet-

Figura 4: Piano centrale composto CCC $2^2 + 2 \cdot 2 + 1$

to ai vertici del fattoriale; si parla in questo caso di piano **Central Composite Circumscribed - CCC**, che è rappresentabile come un piano in cui tutti i punti non centrali stanno su una circonferenza o sulla superficie di una sfera o ipersfera (Figura 4). Nel caso invece in cui il fattore di scala delle differenze sia 1, gli star points giaceranno sulla faccia del quadrato, cubo o ipercubo definito dai punti del full factorial associato, dando origine al piano **Central Composite Faced - CCF** (Figura 5). Il piano CCC risulta essere più preciso, soprattutto al fine di avere una ricostruzione della risposta con un modello quadratico, come si vedrà più avanti; per contro, richiede 5 livelli per ogni fattore invece di 3. In generale, comunque, per k parametri, $2k$ star points e un punto centrale sono aggiunti al full factorial 2^k , portando la sample size del progetto composto centrale a $2^k + 2k + 1$. L'aver un numero di sample points maggiore di quello strettamente necessario per un'interpolazione bilineare (i.e. 2^k) permette di stimare la curvatura dello spazio.

Modellazione delle superfici di risposta

Uno sviluppo seguente al DOE e strettamente correlato ad esso è la **modellazione delle superfici di risposta** o **Response Surface Modelling - RSM**. Si tratta

Figura 5: Piano centrale composito CCF $2^3 + 2 \cdot 3 + 1$

di una serie di tecniche impiegate per interpolare o approssimare le informazioni provenienti dai risultati di vari set di run DOE, al fine di ricostruire l'andamento della risposta, o funzione obiettivo, nello spazio di progettazione.

In sostanza la simulazione, eseguita per ogni punto del progetto sperimentale adottato, fornisce i relativi parametri di uscita: si ha quindi una nuvola di punti sperimentali. L'obiettivo è quello di ipotizzare una forma analitica, in una certa misura a discrezione dell'utente e sovente polinomiale, che passi, se non per i punti stessi, almeno ad una distanza da ciascuno di essi tale da approssimare bene i dati di output della simulazione (**data fitting**). In questo modo, la variabile di risposta in corrispondenza di set di input diversi da quelli adottati nel piano sperimentale si può stimare, con errore contenuto, come funzione delle variabili di ingresso secondo la legge analitica ottenuta, anziché dover ripetere la simulazione anche nei nuovi punti.

Tale funzione di ricostruzione è chiamata **superficie di risposta**, o **meta-modello**, o **modello di regressione** e può essere ottenuta per ogni parametro

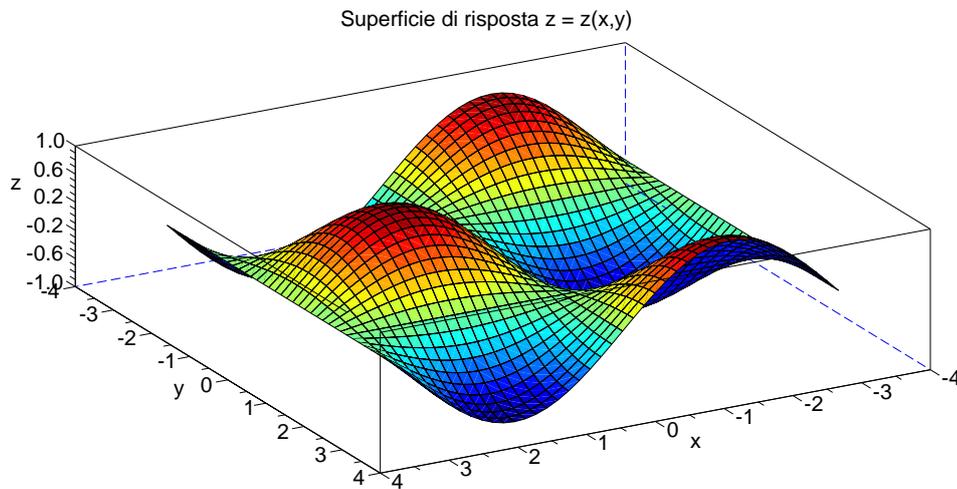


Figura 6: Superficie di risposta di z ai fattori x e y

di output. Matematicamente è una iper-superficie interpolante o approssimante, k -dimensionale, in uno spazio $(k+1)$ -dimensionale formato dai k fattori e dalla funzione obiettivo. Ad esempio la Figura 6 riporta il grafico 3-D della risposta z ai vari livelli dei 2 input x e y , nei rispettivi intervalli di interesse.

I vantaggi della modellazione delle superfici di risposta sono il poter graficamente valutare la zona dei parametri di input che porta ad una risposta ottimale, e soprattutto il fatto che la superficie è una funzione analitica, per cui la sua ottimizzazione è agevole e non richiede ulteriori esperimenti o simulazioni. I pre-requisiti per l'attendibilità dei risultati sono però che la funzione di risposta sia abbastanza regolare e che i run DOE svolti abbiano fornito una sufficiente quantità di informazioni.

Si può correlare l'interazione tra i fattori alla forma della superficie di risposta. Un'interazione nulla tra due fattori, ovvero un modello di superficie di risposta generato dai soli effetti principali, è rappresentabile ad esempio con una funzione lineare, o quadratica, o via dicendo, ma sempre caratterizzata da soli termini puri, in cui le variabili di ingresso compaiono singolarmente (nel caso particolare in cui la funzione di ricostruzione scelta sia lineare, la superficie diventa un iperpiano). Se

si prevede invece interazione, occorre tener conto anche dei termini misti $x_1x_2\dots$, come chiarito in seguito.

Esistono differenti tecniche RSM, che si differenziano essenzialmente per la forma analitica scelta per la funzione di risposta e per la logica di interpolazione o approssimazione utilizzata. Si presenta qui il metodo dei minimi quadrati, il più semplice e diffuso, adottato come tecnica di default per l'analisi di regressione in molti software statistici.

Metodo dei minimi quadrati

Il **metodo dei minimi quadrati**, o **Least Squares Method - LSM**, è usato per i sistemi sovradeterminati, quelli cioè in cui il numero di punti sperimentali è superiore al numero dei parametri della funzione di risposta da determinare. Non potendo quindi garantire il passaggio per tutti i punti (**interpolazione**), si vuole garantire che l'**approssimazione** sia la migliore possibile; il criterio scelto da questo metodo per verificare ciò è la minimizzazione della somma degli scarti quadrati tra i punti effettivi e quelli predetti dalla curva. Matematicamente, si vuole determinare una funzione $\hat{f}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ vettore dei k fattori. Questa funzione può assumere varie forme analitiche; qui si ci si concentra sulle seguenti.

- **Modello lineare senza interazioni:**

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j x_j \quad (3)$$

- **Modello lineare con interazioni:**

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j x_j + \sum_{j=1, j < r}^{k-1} \sum_{r=1}^k b_{jr} x_j x_r \quad (4)$$

- **Modello quadratico:**

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j x_j + \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^k b_{jr} x_j x_r \quad (5)$$

Prendendo per semplicità il modello lineare senza interazioni (Eq. 3), si può scrivere in forma matriciale il sistema:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{e} \quad (6)$$

dove \mathbf{y} è il vettore ($N \times 1$) delle osservazioni sperimentali y_i relative agli N esperimenti. Il termine \mathbf{e} è il vettore ($N \times 1$) dei **residui** (o scarti), il cui generico elemento è definito come: $e_i = y_i - \hat{y}(\mathbf{x}_i)$. In sostanza si esprimono i punti sperimentali y_i come $\hat{y}(\mathbf{x}_i)$, ovvero approssimati dalla funzione \hat{y} (che si vuole ora determinare) in cui è stato inserito l' i -simo set di fattori \mathbf{x}_i , più l'errore di approssimazione: il residuo e_i . Nell'equazione appena vista è incognito il vettore ($(k+1) \times 1$) dei coefficienti \mathbf{b} , da cui dipende anche il vettore \mathbf{e} . Si tratta dunque di determinare quel particolare \mathbf{b} che minimizza la somma dei residui al quadrato $S = \sum_{i=1}^N e_i^2$, ovvero:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{b}} = -2\mathbf{X}^T \mathbf{y} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{b} = 0 \quad (7)$$

Risolvendo in \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (8)$$

Noto il vettore dei coefficienti, e determinato quindi il modello di regressione, la funzione di risposta è la seguente:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\mathbf{b} \quad (9)$$

Il metodo dei minimi quadrati è implementato di default in R: tutte le superfici di risposta trovate in questo lavoro con tale software sono implicitamente ottenute secondo la tecnica LSM.

Scelta fra piani DOE anche alla luce di RSM

Innanzitutto, una precisazione molto importante è necessaria. I metodi DOE fin qui visti definiscono il numero di combinazioni di fattori da usare per gli esperimenti, non il numero di esperimenti. Infatti, può accadere che il sistema non sia deterministico, ovvero che alcuni ingressi seguano distribuzioni stocastiche, come nel caso trattato in questo lavoro, o che intervengano fattori incontrollati. Se il sistema è stocastico, ad ogni data set di ingresso possono corrispondere tante risposte. Si rende quindi necessario un certo numero di replicazioni dell'esperimento almeno in alcuni dei punti del piano sperimentale. Definendo, per il piano, N il numero di esperimenti totale, e n il numero di punti, si ha sempre $n \leq N$; $n = N$ se il sistema è deterministico, quindi si esegue una sola prova per punto; in generale, supponendo di svolgere r replicazioni per ogni punto, $N = rn$.

Esistono molte tecniche DOE, e non c'è risposta univoca su quale sia la scelta migliore. Molto dipende dal problema che deve essere affrontato e dall'obiettivo della sperimentazione. Certamente occorre considerare:

- Il numero di esperimenti N che può essere affrontato. Nel determinarlo, molta importanza riveste il tempo che una singola replicazione richiede, ben diverso ad esempio a seconda che si tratti di simulazioni con potenti CPU o complessi esperimenti fisici da settare in laboratorio.
- Il numero di parametri k dell'esperimento. Per molte tecniche DOE, il numero di esperimenti richiesto cresce esponenzialmente con il numero di parametri; per contro, tecniche più leggere esplorano peggio il design space, con conseguente maggior rischio di imprecisione dei risultati. La conoscenza teorica del problema può permettere di scartare alcuni parametri che si sa già a priori essere poco significativi e, a parità di N , aumentare così il numero di esperimenti dedicabile ai parametri principali.

Metodo	Nr di punti	Adatto per
Full factorial	$n(L, k) = L^k$	mains, interactions, RSM
Fractional factorial	$n(L, k, p) = L^{k-p}$	mains e interactions
Central composite	$n(k) = 2^k + 2k + 1$	RSM

Tabella 1: Tavola sinottica di alcuni metodi DOE

- Il numero di livelli L per ogni parametro. Un numero troppo esiguo di livelli non permette una buona interpolazione. Quanto più ci si aspetta un comportamento irregolare della variabile di risposta, tanto più L deve essere tenuto alto (è lo stesso concetto dell'infitimento delle mesh nelle zone ad alti gradienti di alcuni parametri nell'analisi FEM o CFD). Metodi a 2 livelli permettono infatti al più un'interpolazione lineare o bilineare, metodi a 3 livelli permettono di ricostruire superfici di risposta quadratiche o biquadratiche e via dicendo: metodi a L livelli danno origine a superfici di ordine al più $L - 1$. Se però la risposta è lineare, non c'è bisogno di superfici di ordine elevato per descriverla.
- Lo scopo del DOE: se si desidera principalmente valutare i main effects e le interactions, i piani fattoriali sono ottimi; i fattori primari sono invece ben investigati da tecniche RCBD o latin square (in questa sede non riportate), mentre per la ricostruzione RSM, a volte tanto importante ai fini della buona riuscita dell'esperimento tanto quanto la scelta della tecnica DOE, sono consigliabili i fattoriali o il composito centrale, come spiegato meglio in seguito.

In Tab. 1 sono riportati sinteticamente i metodi visti, con campi di applicabilità da intendersi come indicativi e non assoluti.

Riguardo all'ultimo punto, ovvero alla scelta dei piani DOE in funzione dello step successivo di ricostruzione delle superfici di risposta, si sottolinea che ogni piano sperimentale ha una forma polinomiale del modello di regressione con cui si associa meglio. In bibliografia si consiglia:

- Un piano fattoriale frazionario per una superficie di risposta lineare senza interazioni (Eq. 3);
- Un piano fattoriale completo per una superficie di risposta lineare con interazioni (Eq. 4);
- Un piano composito centrale per una superficie di risposta quadratica (Eq. 5).

Progettazione robusta

La **progettazione robusta** o **Robust Design Analysis - RDA** può essere considerata un ulteriore step nel processo di ottimizzazione di un sistema, il cui scopo non è solo quello di trovare una soluzione di ottimo, ma anche di valutare la capacità della soluzione di non deteriorare le proprie performances al variare del rumore (o incertezza, o variabili incontrollabili) associato ai fattori di input. Si tratta di un argomento molto importante nella pratica ingegneristica, perché leggere variazioni di condizioni operative sono all'ordine del giorno in molti sistemi e un design, pur ottimale, non sarebbe desiderabile se il comportamento del sistema a seguito di tali spostamenti nello spazio dei parametri di input dovesse cambiare repentinamente. Da questo punto di vista **robustezza**, **affidabilità** e **qualità** possono essere considerate sinonimi e si riferiscono a tale capacità.

In pratica, l'uso dell'RDA ha lo scopo di valutare in che modo un rumore sull'ingresso va ad impattare sulla risposta, o funzione obiettivo. Il **rumore** è un termine che racchiude i significati di:

- errori che possono essere stati commessi durante la produzione di un manufatto (tolleranza);
- il deterioramento di un oggetto con l'uso che causa una variazione delle performances;

- il fatto che un sistema non lavora nel range di condizioni operative per il quale è stato progettato;
- ogni altro fattore esterno che non è possibile controllare.

In definitiva la progettazione robusta è la gestione delle incertezze, le quali sono spesso dovute a mancanze di conoscenza del sistema. Spesso si rende necessaria l'R-DA perché le tradizionali tecniche di ottimizzazione tendono a sovra-ottimizzare, ovvero a trovare soluzioni che funzionano bene in spazi ristrettissimi di parametri, ma presentano scadenti caratteristiche di off-design.

Il metodo ANOVA per l'analisi dei risultati

Le simulazioni forniscono in output una notevole mole di dati sperimentali, da analizzare rigorosamente per cercare di trarne conclusioni scientificamente accettabili. Si può a questo fine ricorrere ad una tecnica statistica molto usata in ambito di ricerca: l'**Analisi della varianza**, o **ANalysis Of VAriance - ANOVA**.

L'obiettivo del metodo è valutare l'importanza relativa delle diverse fonti di variazione nella variabilità osservata nel corso di un esperimento:

- Fonti di variazione **sistematiche**, sotto il controllo dello sperimentatore, ovvero i data set di fattori di ingresso;
- Fonti di variazione **casuali** (variabilità stocastica intrinseca, condizioni ambientali, errori di misurazione).

Matematicamente, si tratta di formulare un'**ipotesi nulla**, H_0 , e la sua negazione, l'**ipotesi alternativa** H_a .

L'ipotesi nulla prevede l'uguaglianza delle medie di tutti i gruppi, a significare che l'appartenenza ad un particolare gruppo (i.e., il particolare set di fattori) non ha influenza sul risultato, che i dati di tutti i gruppi provengono dalla stessa

popolazione, e che le differenze osservate tra i gruppi sono solo dovute alle fonti di variazione casuali.

L'ipotesi alternativa, invece, coincide spesso con quello che si vuole dimostrare attraverso gli esperimenti, che cioè i fattori considerati sono significativi, e che almeno un gruppo ha media diversa dagli altri. Se è vera l'ipotesi alternativa, certamente anche le fonti di variazione casuali hanno effetto, ma ad esse si aggiungono quelle sistematiche.

Per valutare l'ipotesi alternativa contro l'ipotesi nulla occorre definire:

- la varianza entro i gruppi, o **within**, la quota della varianza complessiva attribuibile alle fluttuazioni casuali;
- la varianza tra i gruppi, o **between**, la quota della variabilità complessiva della variabile risposta attribuibile invece alla manipolazione sperimentale.

Si cerca quindi di valutare la preponderanza di una rispetto all'altra, sulla base di cui stabilire se il variare della risposta a fronte di variazioni degli ingressi sia effettivamente da attribuire alla variazione degli ingressi (varianza between molto elevata relativamente alla varianza within) o se invece sia compreso nel range di variabilità statistica e non sia quindi da interpretare come correlazione.

Si valuta poi il coefficiente f sulla base di cui calcolare il **p-value** che indica l'accettazione o il rigetto dell'ipotesi nulla.

La devianza totale è esprimibile come:

$$D_{tot} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - Y)^2 \quad (10)$$

scomponibile nel seguente modo:

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - Y)^2 = \sum_{j=1}^p (y_{m,j} - Y)^2 + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - y_{m,j})^2 \quad (11)$$

Se il valore del p-value fa propendere per il rifiuto dell'ipotesi nulla ciò, come già evidenziato, non significa che le medie sono tutte significativamente diverse

l'una dall'altra ma, piuttosto, che c'è almeno una coppia di medie che risultano statisticamente diverse tra loro.