

GESTIONE DEI MATERIALI

Generalità

Compiti della gestione dei materiali sono l'ordine, il ricevimento, lo stoccaggio e l'alimentazione delle operazioni. L'obiettivo, quindi, che ci si prefigge con la gestione dei materiali è quello di avere a disposizione le giuste risorse, nei tempi e nelle quantità desiderate e al costo minore possibile. Per perseguire questo scopo spesso si verifica la necessità di dotarsi di scorte di materiali. Vi sono diversi tipi di scorte che possono essere classificate in scorte di fornitura, materie prime semilavorati o di prodotti finiti. Le scorte di fornitura possono essere i materiali di cancelleria o gli articoli necessari per effettuare le operazioni di manutenzione. Queste scorte sono acquistate da fornitori esterni e destinate all'utilizzo nei settori amministrativi, nei reparti di produzione e per le operazioni di manutenzione. Le materie prime, invece, sono scorte che fanno parte del ciclo produttivo, vengono acquistate da fornitori esterni e sono destinate alla produzione dove, dopo una serie di trasformazioni fisiche, chimiche o di forma, vengono trasformate in prodotti finiti. Tali prodotti finiti, originati dalla produzione e in taluni casi dai fornitori (caso delle aziende operanti nel settore della distribuzione dei prodotti) sono destinate ad essere immagazzinate in attesa di essere immesse sul mercato o inviate direttamente al mercato. Esistono poi i semilavorati che costituiscono scorte tra diversi reparti di lavorazione e che hanno origine e destinazione nei diversi reparti produttivi. La scelta di classificazione delle scorte sotto questo profilo, dipende dal tipo di azienda in esame. Alcuni beni che possono essere classificati per un'azienda come materia prima, sono invece classificati come prodotto finito per un'azienda che è subfornitrice della prima. La funzione che questi tipi di scorte sono chiamate a svolgere, è quella di fungere da polmone tra due diversi ambienti che sono tra loro interfacciati, quali possono essere il mercato e l'azienda produttrice, reparti diversi all'interno di una stessa azienda produttrice, ecc., per evitare che andamenti non valutabili in modo deterministico comportino, ad

esempio, delle riduzioni del livello di servizio o di efficienza di produzione. Il loro livello deve essere tenuto sotto controllo poiché i costi di mantenimento a scorta sono spesso rilevanti.

I fattori principali che determinano l'esigenza di scorte sono il tempo, la discontinuità, l'incertezza e l'economicità. Il fattore tempo considera che tra il momento in cui un ordine è emesso e il momento in cui lo stesso ordine è evaso trascorre un intervallo di tempo necessario ad espletare tutte le funzioni che, partendo dal ricevimento della materia prima, permettono di avere il prodotto disponibile al cliente (lead time). Produrre in anticipo andando incontro alla domanda porta a ridurre il lead time ma per questo occorre produrre per il magazzino. La discontinuità è legata all'inefficienza dei sistemi produttivi che non potrebbero essere in grado di produrre nelle identiche quantità richieste istante per istante dai clienti. Il fattore incertezza contempla tutto ciò che può portare a variazioni dei piani previsti per fenomeni che non sono perfettamente noti a priori come il verificarsi di guasti, scioperi, condizioni climatiche particolarmente sfavorevoli, ecc.. Fattori economici sono, infine, dovuti alla possibilità di rendere la produzione più uniforme garantendo un equilibrato utilizzo dei macchinari e della manodopera.

Le funzioni principali cui sono chiamate a rispondere le scorte sono il disaccoppiamento dei processi, la stabilizzazione degli impieghi, la protezione contro i fermi di produzione, avvantaggiarsi degli sconti quantità e la protezione contro gli stock out o rotture di stock.

Il disaccoppiamento dei processi produttivi serve per meglio razionalizzare i processi stessi. Si ottiene provvedendo ad avere scorte tra varie fasi di produzione a partire dalla materia prima fino all'ottenimento dei prodotti finiti e dal punto di produzione, attraverso i distributori, ai punti di vendita. Per quanto riguarda le scorte tra le varie fasi di produzione, esse servono a mantenere parzialmente indipendenti stazioni di lavoro contigue, a fare in modo che guasti di una stazione produttiva non sia causa di fermata per le stazioni che seguono o la precedono nel ciclo di lavorazione.

Le scorte servono per ridurre l'impiego di risorse quando siamo in presenza di accentuate fluttuazioni della domanda. Ad esempio si impedisce in questo modo che il

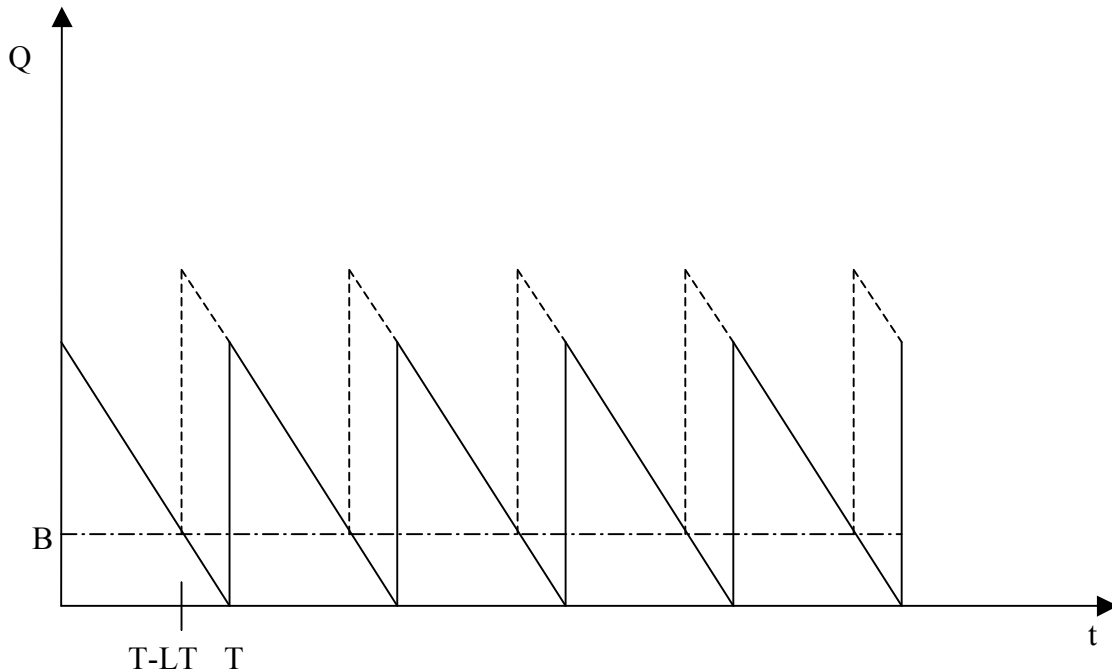
personale, in periodi di bassa richiesta del mercato, rimanga inoperoso o debba essere licenziato, mentre in periodi di elevata richiesta del mercato si debba produrre in modo poco organizzato o si richieda di dover assumere personale per far fronte alla richiesta. Le scorte servono anche per proteggersi da eventuali interruzioni di fornitura da parte di altre aziende. Questo consente di avere un lasso di tempo per reperire fonti alternative di approvvigionamento o permettere all'azienda di continuare a produrre finché non venga rimossa la causa di interruzione.

Spesso vengono ottenuti sconti da parte delle aziende fornitrici quando le quantità che vengono ordinate superano determinati valori. Questo fattore incide anche sul costo di emissione dell'ordine. Infine le aziende potrebbero non essere in grado di far fronte con la produzione ad inaspettati incrementi della domanda e in questo modo perdere importanti vendite o veder ridurre la propria immagine presso i clienti.

Modelli di gestione delle scorte a intervallo fisso e a quantità fissa

Tipici modelli di gestione delle scorte sono il modello di gestione a intervallo fisso e il modello di gestione a quantità fissa. Nel primo modello di gestione si esegue un controllo periodico, con periodo fisso, delle scorte, quindi, si emette un ordine che ripristini la scorta massima che si desidera. Quando il lead time tra il tempo di emissione dell'ordine e il tempo in cui la merce arriva a destinazione aumenta rispetto al tempo previsto, c'è il pericolo di andare in rottura di stock. Nel modello di gestione a quantità fissa, invece, viene fissato un livello di scorte raggiunto il quale occorre effettuare un ordine che sarà sempre della stessa quantità. Il livello di scorte che una volta raggiunto dà il segnale per emettere l'ordine prende il nome di punto o livello di riordino. Il punto di riordino viene fissato in base al lead time di riordino previsto e al tasso di consumo del materiale da riordinare più una eventuale scorta, detta di sicurezza, che garantisce dalle incertezze della domanda o dei tempi di durata del lead time. Occorre precisare che quando si parla di scorte da tenere sotto controllo, si parla sempre di scorte disponibili che sono costituite dalle scorte in mano, quindi dalle

scorte che sono presenti in magazzino, aumentate delle scorte in viaggio, che sono rappresentate dalle scorte già ordinate ma non ancora ricevute.



Lotto economico di acquisto

Il modello del lotto economico di acquisto mira a minimizzare la funzione costi che deriva dalla somma dei costi di acquisto, di emissione di un ordine e di mantenimento a scorta dei beni, basandosi su alcune ipotesi semplificative. Le ipotesi sono: domanda nota e costante nel tempo, prezzo unitario di acquisto costante per ogni dimensione del lotto ordinato e nel periodo considerato, lead time di riordino noto e costante, costi di stoccaggio unitari costanti, l'ordine emesso è inserito a scorta interamente non appena è stato ricevuto, non si considera la possibilità di avere rotture di stock, ipotesi che equivale a fissare un costo infinito alla rottura di stock, possono essere trasportate lotti di qualunque dimensione senza che questo influenzi i costi di trasporto, l'ordine emesso può essere di dimensione qualunque. Sotto queste ipotesi la relazione dei costi totali è fornita dalla seguente relazione:

$$Tc = pD + \frac{D}{Q}c_o + \frac{Q}{2}\hat{c}_s p$$

dove p è il prezzo di acquisto di un'unità del singolo bene, D è la domanda annua, c_o è il costo di emissione di un singolo ordine, $\hat{c}_s$ è il costo di un euro messo a scorta per un anno e Q è la quantità ordinata con un singolo ordine. Il minimo della funzione costo va ricercato in funzione della dimensione del lotto di ordinazione per determinare il lotto economico. Per fare ciò occorre derivare la funzione costo rispetto a Q e porre la relazione ottenuta uguale a zero. Si può vedere che la relazione presenta un solo punto dove la derivata si annulla e che questo è un punto di minimo effettuando il calcolo della derivata seconda. La relazione del lotto economico di acquisto è quindi:

$$Q_{ott} = \sqrt{\frac{2c_o D}{\hat{c}_s p}}$$

Con semplici calcoli è possibile ottenere l'intervallo ottimo di riordino, il costo totale ottimo e il numero ottimo di ordini emessi in un anno:

$$\begin{aligned} T_{ott} &= \frac{Q_{ott}}{D} = \sqrt{\frac{2c_o}{\hat{c}_s p D}} \\ n_{ott} &= \frac{1}{T_{ott}} = \sqrt{\frac{\hat{c}_s p D}{2c_o}} \\ Tc_{ott} &= p \cdot D + 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{c}_s p D c_o}{2}} \end{aligned}$$

Il valore di punto di riordino, corrispondente al livello di scorta per la quale occorre effettuare l'ordine delle Q_{ott} unità, è dato dal consumo durante l'intervallo di riordino, lead time di ordinazione. Se le unità temporali con cui è valutato il lead time sono diverse da quelle per le quali viene valutata la domanda, occorre introdurre un fattore di conversione temporale:

$$B = \frac{D \cdot LT}{N}$$

dove N rappresenta il numero di unità temporali in cui è espresso il lead time contenute nell'unità di tempo in cui è espressa la domanda. Generalmente la domanda è valutata con riferimento all'anno mentre il lead time in riferimento alla settimana ($N = 52$) o ai giorni ($N = 365$).

È possibile modificare il modello tenendo conto di eventuali sconti che si possono ottenere quando si emette un ordine superiore a prefissate quantità. In questo caso si possono avere due situazioni distinte riguardo alle quantità su cui lo sconto incide. Si può verificare il caso in cui lo sconto vale su tutte le quantità ordinate, una volta che sia stato superato un determinato valore di soglia, oppure per le sole quantità che eccedono il valore di entità del lotto a partire dal quale scatta lo sconto sul prezzo di acquisto.

Nel primo caso, detto q_1 il valore di dimensione del lotto di riordino oltre il quale scatta lo sconto quantità, se il lotto di riordino è di dimensione inferiore a q_1 si pagherà un prezzo p_0 per ciascuna unità acquistata mentre se il lotto di acquisto è maggiore o uguale a q_1 si pagherà un prezzo unitario di acquisto pari a p_1 e inferiore a p_0 . Da ciò si deduce che, se si ritenessero valide le curve dei costi totali calcolate per il prezzo di acquisto p_0 e p_1 anche oltre i rispettivi campi di validità, il lotto ottimo di acquisto aumenterebbe di dimensione al diminuire del prezzo di acquisto e che, per ogni valore di dimensione del lotto di riordino, il costo totale valutato al prezzo di acquisto minore si mantiene sempre inferiore a quello calcolato per il prezzo di acquisto maggiore.

Queste due considerazioni portano a concludere che se il lotto economico di acquisto per il prezzo scontato cade nel campo di validità della relativa curva dei costi totali questo sarà il minimo dei minimi, quindi, il lotto economico di riordino. Se ciò non accadesse la curva del costo totale riferita al costo di acquisto inferiore sarebbe, nel suo campo di validità, in fase crescente, mentre il valore di lotto economico di acquisto della curva calcolata al costo di acquisto maggiore cadrebbe nel relativo campo di validità. È opportuno in questo caso porre in confronto il costo totale calcolato in corrispondenza del lotto economico di acquisto per la curva a costo maggiore con il costo totale relativo al costo di acquisto minore in corrispondenza del valore di dimensione del lotto per il quale è scattato lo sconto.

Più in generale, qualora esistessero più sconti per quantità ordinate, si può vedere che per il calcolo del lotto ottimo di riordino è necessario innescare un processo iterativo che parte con il calcolo del lotto economico di riordino per la funzione costo totale calcolata al valore minore di prezzo di acquisto. Successivamente si verifica l'appartenenza al campo di validità di questo valore. Nel caso questa condizione sia verificata si accetta questo come valore ottimo, diversamente si procede allo stesso calcolo e verifica della condizione di appartenenza finché non si trova un valore di lotto economico ottimo che cada all'interno del campo di validità della funzione costo totale per cui è stato calcolato. Una volta trovato un valore di lotto economico di acquisto che cade all'interno del campo di validità della funzione costo, il valore di costo totale corrispondente a questo punto deve essere confrontato con i valori di costo totale calcolati per ognuno dei prezzi inferiori a quello per il quale si è trovato un lotto economico appartenente al campo di validità, in corrispondenza del valore di lotto di acquisto per il quale si ottiene un scatto dello sconto.

(fig. 6 e 7 delle copie)

Altro caso si ha, invece, quando lo sconto quantità è valido per le sole quantità eccedenti un certo valore. Siano valide le seguenti condizioni:

prezzo	intervallo di validità
p_0	$0 \leq Q \leq Q_1 - 1$
p_1	$Q_1 \leq Q \leq Q_2 - 1$
...	...
p_i	$Q_i \leq Q \leq Q_{i+1} - 1$
...	...
p_n	$Q_n \leq Q$

si introduce una funzione costo $M_i(Q)$, valida tra Q_i e $Q_{i+1}-1$, che definisce il valore dell'acquisto di Q quantità. La forma generale che la funzione introdotta assume è la seguente:

$$M_i(Q) = M_i(Q_i - 1) - p_i \cdot (Q_i - 1) + p_i \cdot Q$$

La funzione costo totale assume quindi il seguente valore quando Q è compreso in un intervallo $[Q_i, Q_{i+1}-1]$:

$$\begin{aligned} C_{Tot} &= \frac{D}{Q} \cdot (M_i(Q) + c_o) + \hat{c}_s \cdot \frac{M_i(Q)}{2} = \dots \\ &= \frac{D}{Q} \cdot (M_i(Q_i - 1) - p_i \cdot (Q_i - 1) + c_o) + D \cdot p_i + \hat{c}_s \cdot \frac{M_i(Q_i - 1) - p_i \cdot (Q_i - 1)}{2} + \hat{c}_s \cdot \frac{p_i \cdot Q}{2} \end{aligned}$$

derivando la funzione costo totale e ponendo la derivata uguale a zero si ottiene il minimo della funzione che, per l'intervallo di definizione i^{mo} vale:

$$Q_{ott,i} = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot (M_i(Q_i - 1) - p_i \cdot (Q_i - 1)) + c_o}{\hat{c}_s \cdot p_i}}$$

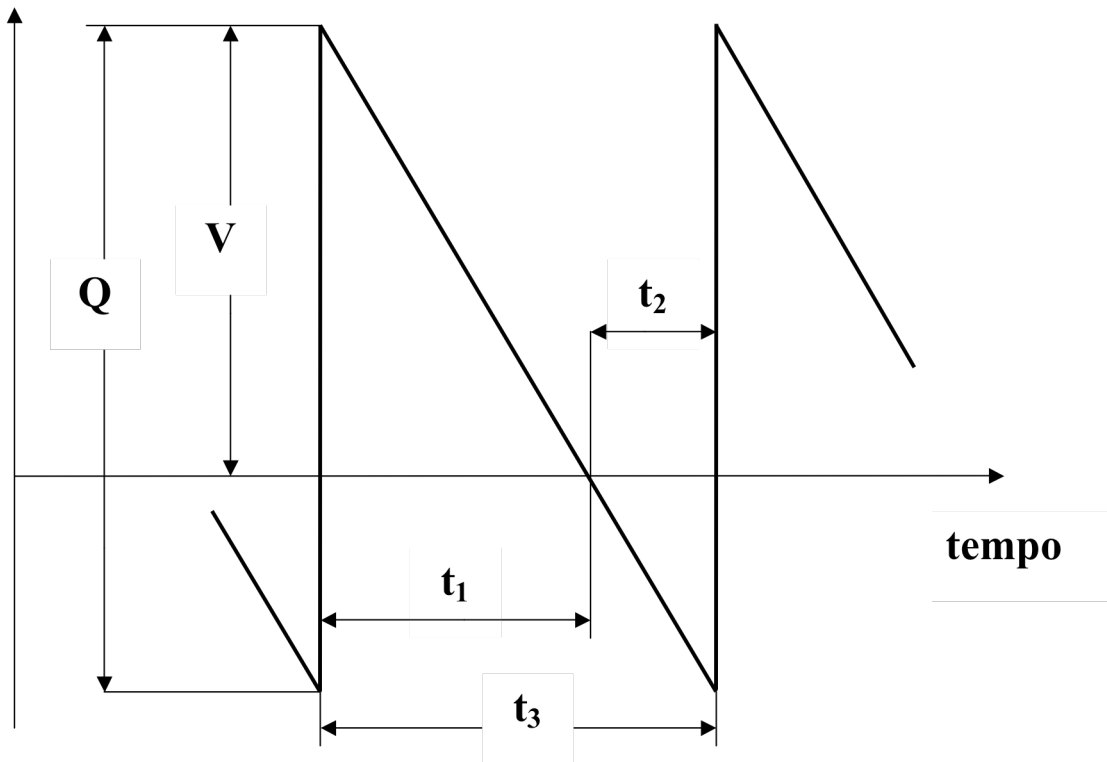
Per questo problema è stato dimostrato che se esiste un ottimo questo è compreso all'interno del relativo campo di validità e non si può avere un minimo in un estremo dell'intervallo di demarcazione del campo di validità. Per questa ragione è necessario calcolare tutti i valori di lotto economico per i diversi intervalli di prezzo. Solo per i lotti economici che cadono all'interno di un campo di validità devono essere confrontati i valori che la funzione costo totale assume e determinare il valore di lotto economico in corrispondenza del costo totale minimo.

Altre modifiche al modello di lotto economico di acquisto sono introdotte per valutare il caso di rotture di stock eliminando in questo modo un vincolo del problema di base. Questa posizione equivale ad affermare che i clienti sono disposti ad accettare

dilazioni nella consegna dei beni rispetto alla data richiesta, ma ogni ritardo nella consegna ha un suo costo. In questo caso è opportuno modificare il modello per tenere conto dei maggiori costi che occorrono per evadere un ordine posticipato. Infatti la merce spedita per far fronte ad ordini di periodi precedenti transita solo dal magazzino non comportando, quindi, costi di stoccaggio, ma necessita di modalità di spedizione di maggior costo rispetto a quelli relativi alla normale gestione. In taluni casi si fa ricorso a fornitori esterni che richiedono maggiori prezzi per ridurre il lead time, in altri casi è necessario l'impiego di straordinari per la realizzazione dei prodotti. Nel caso in cui non ci fossero spese aggiuntive per l'evasione dell'ordine in tempi dilazionati, non sarebbe necessario mettere a scorta alcun materiale; nel caso, invece, in cui il costo connesso all'evasione dell'ordine in ritardo assuma valori rilevanti, è necessario evitare il verificarsi di ritardi di consegna. Nel momento in cui il costo di rottura di stock, cioè il costo di evasione in ritardo di una certa quantità di prodotto, è finito, può sussistere un vantaggio economico se si permette che si verifichi una rottura di stock.

Nella successiva figura (dove $Q_{\max}$ equivale a V) è rappresentato un modello di un ordine ritardato.

È emesso un ordine di Q unità quando il livello di scorta disponibile raggiunge il livello di riordino. Nel momento in cui la quantità ordinata arriva viene ripristinata la quantità massima presente in magazzino e pari a $Q_{\max}$. La quantità di $Q - Q_{\max}$, corrispondente all'ordine da evadere in ritardo, viene inviata, con maggiori costi, ai clienti. Il costo di stockout è proporzionale al tempo di ritardo, quindi può essere valutato in modo del tutto analogo ai costi di stoccaggio.



Se con $\hat{c}_{so}$ indichiamo il costo di stockout di un euro in un anno, durante un intervallo di tempo pari a T, che rappresenta il periodo, cioè l'intervallo regolare di tempo al termine del quale si ripristina la condizione di inizio, si può scrivere l'espressione del costo medio di stoccaggio durante il periodo t_1 come:

$$\hat{c}_s \cdot p \cdot \frac{Q_{\max}}{2} \cdot t_1 = \hat{c}_1 \cdot p \cdot \frac{Q_{\max}^2}{2D}$$

essendo :

$$D = \frac{Q_{\max}}{t_1} ; \text{ quindi } t_1 = \frac{Q_{\max}}{D}$$

Analogamente per il costo di rottura possiamo scrivere :

$$\frac{\hat{c}_{so} \cdot p \cdot (Q - Q_{\max}) t_2}{2} = \frac{\hat{c}_{so} \cdot p \cdot (Q - Q_{\max})^2}{2D}$$

essendo :

$$D = \frac{Q - Q_{\max}}{t_2} ; \text{ quindi } t_2 = \frac{Q - Q_{\max}}{D}$$

Il costo totale di un singolo periodo di durata T risulta essere:

$$C_t = Q \cdot p + c_o + \frac{\hat{c}_1 \cdot Q_{\max}^2}{2D} + \frac{\hat{c}_{so} \cdot p \cdot (Q - Q_{\max})^2}{2D}$$

ed essendoci in un anno un numero di periodi T pari a $\frac{D}{Q}$ ne deriva un costo annuo totale pari a:

$$C_{tot} = p \cdot D + c_o \cdot \frac{D}{Q} + \hat{c}_s \cdot p \cdot \frac{Q_{\max}^2}{2 \cdot Q} + c_{so} \cdot \frac{(Q - Q_{\max})^2}{2 \cdot Q}$$

dove c_{so} è il costo di stock out per una unità per un anno.

Si determinano i valori ottimi di Q e $Q_{\max}$ derivando l'espressione del costo totale una volta rispetto a Q ed una volta rispetto a $Q_{\max}$ per poi uguagliare a zero le espressioni così ricavate, ottenendo infine:

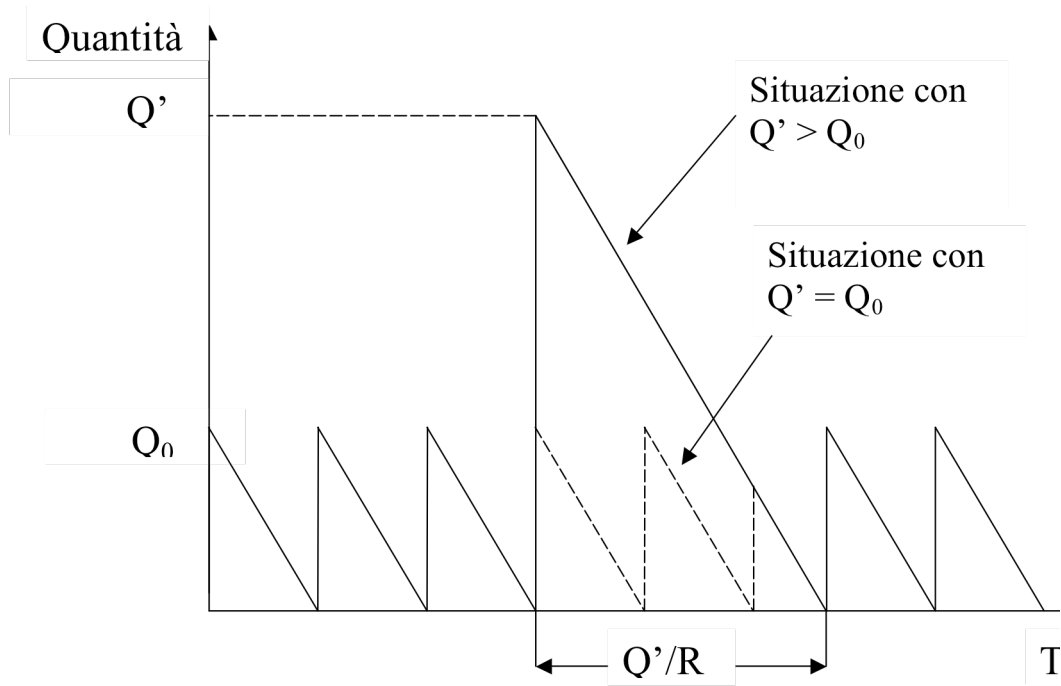
$$Q_{ott} = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot c_o}{\hat{c}_s \cdot p}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{c}_s \cdot p + c_{so}}{c_{so}}}$$

$$Q_{\max,ott} = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot c_o}{\hat{c}_s \cdot p}} \cdot \sqrt{\frac{c_{so}}{\hat{c}_s \cdot p + c_{so}}}$$

Facendo tendere il costo di rottura di stock unitario a infinito, condizione che è verificata per il modello base, si ottiene da queste relazioni l'espressione del lotto ottimo di acquisto del modello base. È possibile andare a calcolare il valore massimo di tempo che un cliente deve attendere come rapporto tra $(Q - Q_{\max})$ e la domanda D , in questo modo è possibile valutare se tale ritardo è accettabile o se invece deve essere valutato un nuovo costo per le rotture di stock.

Nel caso in cui un fornitore, in un certo periodo, effettua uno sconto sul prezzo di acquisto, indipendentemente dalla quantità acquistata, potrebbe risultare conveniente aumentare la quantità da ordinare quando all'interno del periodo di validità dello sconto è previsto di effettuare un ordine. Per valutare l'opportunità di approfittare dello sconto del fornitore occorre calcolare la differenza tra la funzione costo totale nel caso di emissione di un ordine di maggiore entità rispetto a quella del normale ciclo di ordine e la funzione costo totale con quantità ordinate inalterate. Sia k lo sconto

riconosciuto dal fornitore sul prezzo di acquisto e sia Q' la quantità, maggiore di Q_{ott} , ordinata per approfittare dello sconto. La quantità Q' verrà consegnata nel tempo Q'/D che risulterà l'intervallo temporale all'interno del quale calcolare la differenza tra le due funzioni di costo totale.



La durata del periodo di confronto è quindi D/Q' . In quell'intervallo le funzioni costo nei due casi valgono rispettivamente:

$$C_1 = (p - k) \cdot Q_{ott} + p \cdot (Q' - Q_{ott}) + \frac{Q'}{Q_{ott}} \cdot c_o + \frac{Q_{ott}}{2} \cdot \hat{c}_s \cdot (p - k) \cdot \frac{Q_{ott}}{D} + \frac{Q_{ott}}{2} \cdot \hat{c}_s \cdot p \cdot \frac{Q' - Q_{ott}}{D}$$

$$C' = (p - k) \cdot Q' + c_o + \frac{Q'}{2} \cdot \hat{c}_s \cdot (p - k) \cdot \frac{Q'}{D}$$

A questo punto occorre massimizzare la differenza tra le due funzioni facendo la differenza, derivandola e ponendo la derivata uguale a zero. Si ottiene in questo modo:

$$Q'_{ott} = \left(\frac{2 \cdot c_o}{Q_{ott}} + k \right) \cdot \frac{D}{\hat{c}_s \cdot (p - k)}$$

e la differenza che corrisponde a quella scelta è:

$$(C_1 - C')_{ott} = \frac{c_o \cdot (p - k)}{p} \cdot \left(\frac{Q'_{ott}}{Q_{ott}} - 1 \right)^2$$

che risulta essere sempre positivo e quindi sempre conveniente. Nel caso invece in cui all'interno del di validità dello sconto non vi sia alcun ordine che deve essere emesso, bisognerà emettere un ordine in anticipo quando il livello di scorta in mano è pari a q .

In questo caso si ottiene:

$$Q'_{ott} = \frac{2 \cdot D \cdot c_o}{Q_{ott} \cdot \hat{c}_s \cdot (p - k)} + \frac{k \cdot D}{\hat{c}_s \cdot (p - k)} - q$$

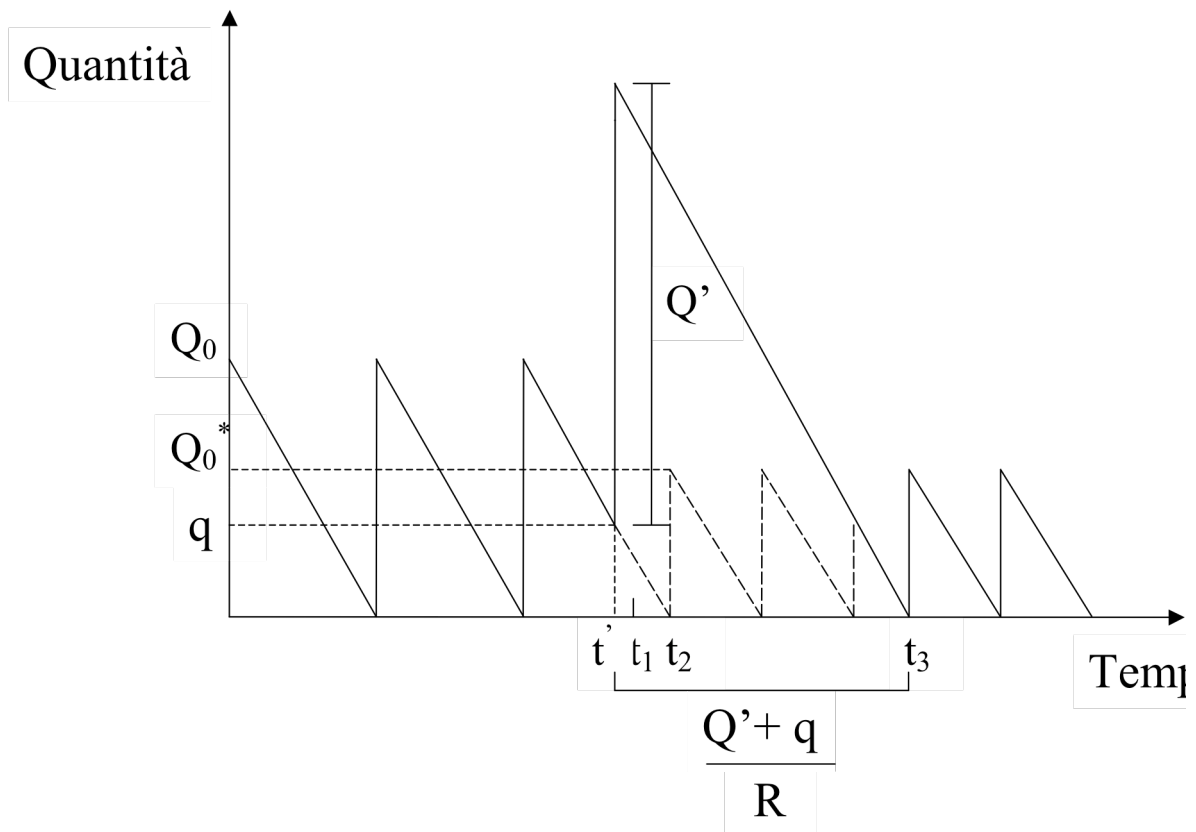
e per il valore corrispondente di differenza:

$$(C_1 - C')_{ott} = c_o \cdot \left(\left(\frac{Q'_{ott}}{Q_{ott} \cdot \sqrt{\frac{p}{p-k}}} \right)^2 - 1 \right)$$

per cui si ottiene un valore positivo di differenza solo quando si verifica:

$$Q'_{ott} > Q_{ott} \cdot \sqrt{\frac{p}{p-k}}$$

Analogo a questo caso è quello in cui si prevede che il prezzo di acquisto aumenti dopo un certo periodo.



Si tratta quindi di decidere se converrà emettere un ordine di una certa entità Q' , la cui dimensione dovrà essere decisa, che verrà pagata al prezzo attuale oppure disinteressarsi del fenomeno. Occorre tenere presente che, se si decidesse di emettere un ordine anticipato, al suo arrivo sarà presente a magazzino una scorta pari a q . Osservando la figura si nota che il periodo in cui interessa effettuare la valutazione di convenienza è quello di durata $(Q' + q)/D$. Le funzioni costo delle quali si dovrà valutare la differenza sono:

$$C_1 = p \cdot q + Q' \cdot (p + k) + \frac{Q'}{Q_{ott}} \cdot c_o + \frac{q}{2} \cdot \hat{c}_s \cdot p \cdot \frac{q}{D} + \hat{c}_s \cdot (p + k) \cdot \frac{Q_{ott} \cdot Q'}{2 \cdot D}$$

$$C' = p \cdot (Q' + q) + c_o + \hat{c}_s \cdot p \cdot \left(\frac{Q' + q}{2} \right) \cdot \left(\frac{Q' + q}{D} \right)$$

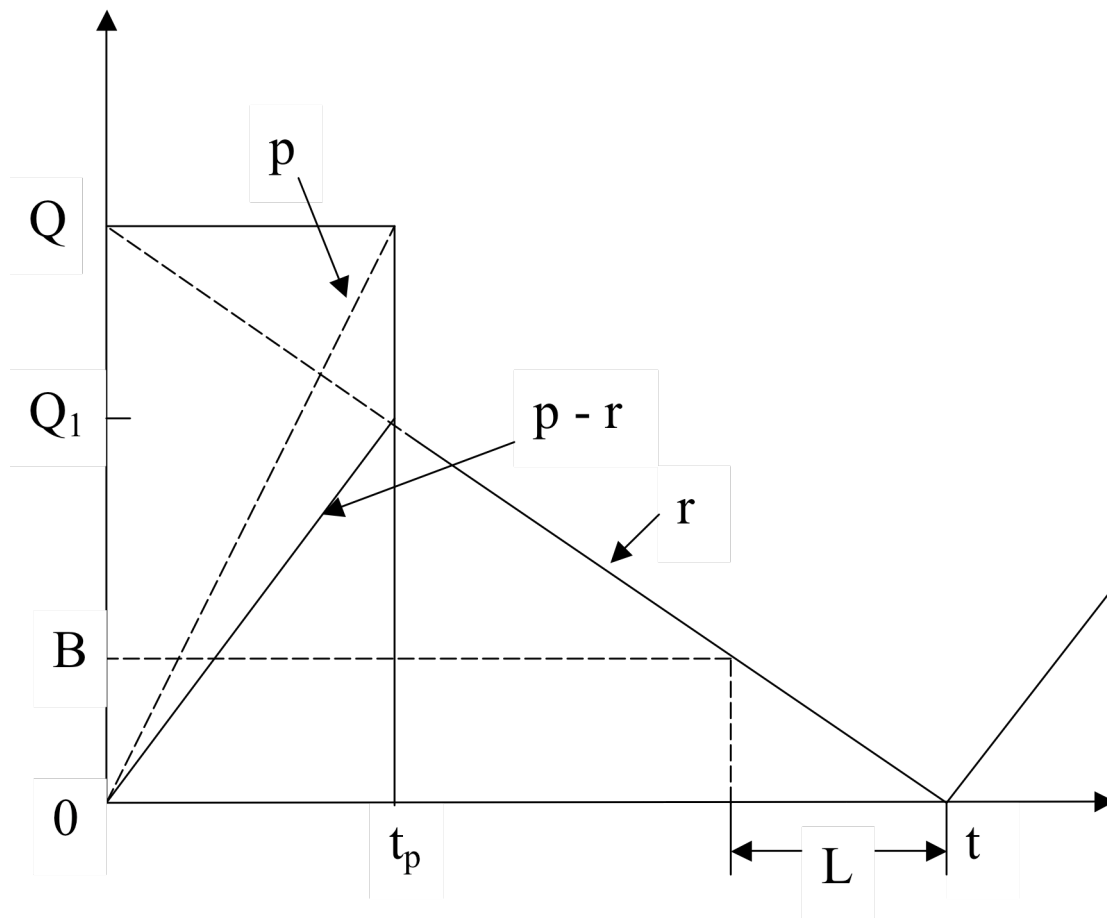
da cui si ottiene, facendo la differenza, derivando e ponendo uguale a zero la derivata:

$$Q'_{ott} = Q_{ott} \cdot \sqrt{\frac{p + k}{p}} + k \cdot \frac{D}{\hat{c}_s \cdot p} - q$$

$$(C_1 - C')_{ott} = c_o \cdot \left(\left(\frac{Q'_{ott}}{Q_{ott}} \right)^2 - 1 \right)$$

Lotto economico di produzione

Nel modello del lotto economico di produzione si considera che occorre un certo tempo per produrre le quantità richieste. Se quindi r_p è il tasso di produzione ed r_c quello di consumo, espressi in quantità per unità di tempo, dovrà essere il rateo di produzione almeno uguale a quello di consumo. Quando il rateo di produzione uguaglia il rateo di consumo si ha il caso di produzione continua, mentre nel caso di rateo di produzione maggiore di rateo di consumo si ha produzione per lotti. Fissata in Q la quantità di prodotto da realizzare, essa sarà prodotta nel tempo $t_p = Q/r_p$, la stessa quantità verrà consumata nel tempo $t_c = Q/r_c$.



(significato dei simboli rispetto al testo: $r_p = p$ ed $r_c = r$)

Come evidenziato dal grafico, durante il periodo di produzione si ha anche consumo, quindi le scorte aumentano in ragione della differenza dei tassi di produzione e di consumo per cui si ottiene un valore massimo della scorta in mano pari a:

$$Q_1 = \frac{r_p - r_c}{t_p} = \frac{(r_p - r_c)}{r_p} \cdot Q$$

La scorta media è di conseguenza uguale a $Q_1/2$. Per la determinazione della funzione costo si dovrà tenere conto del costo variabile di produzione imputabile al prodotto, del costo di setup e del costo di immobilizzo a scorta. Analogamente a quanto visto per il modello del lotto economico di acquisto, si dovrà poi derivare la funzione costo rispetto a Q e porre uguale a zero la derivata per poter determinare il valore ottimo di

dimensione del lotto da inviare come ordine di produzione. Con analoga simbologia tenute nel modello del lotto economico di acquisto, indicando con p il costo variabile da imputare alla produzione di un singolo prodotto, c_o il costo di lancio in produzione di un lotto, costo che terrà conto delle attività amministrative e tecniche come il setup, la funzione costo totale ed il valore di dimensione ottima del lotto di produzione assumono la forma:

$$C_{tot} = p \cdot D + c_o \cdot \frac{D}{Q} + \hat{c}_s \cdot p \cdot \frac{r_p - r_c}{r_p} \cdot \frac{Q}{2}$$

$$Q_{ott} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_o \cdot D \cdot r_p}{\hat{c}_s \cdot p \cdot (r_p - r_c)}}$$

al tendere di r_p a infinito, limite teorico che equivale alla condizione di produzione immediata di ogni quantità ordinata, si ricade nel caso di lotto economico di acquisto come evidenziato dal valore che assume il limite di Q_{ott} del lotto economico di produzione in questo caso. La durata ottima del lancio di produzione risulta essere:

$$T_{p,ott} = \frac{Q_{ott}}{r_p}$$

mentre la quantità di scorta disponibile per la quale occorre emettere il nuovo ordine di produzione risulta essere:

$$B = \frac{D \cdot L_t}{N}$$

dove si ricorda che L_t è il lead time di produzione ed N è il fattore di conversione dell'unità di tempo con cui è espresso il lead time rispetto all'unità di tempo in cui è espressa la domanda.

Anche nel caso di lotto economico di produzione il modello può essere modificato per tenere conto della possibilità di andare in rottura di stock. Questo modello si ottiene con l'eliminazione del vincolo di costo di rottura di stock infinito, ottenendo per il lotto economico di produzione la seguente relazione:

$$Q_{ott} = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot c_o \cdot r_p}{\hat{c}_s \cdot p \cdot (r_p - r_c)}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{c}_s \cdot p + c_{so}}{c_{so}}}$$

e un corrispondente livello di riordino pari a:

$$B = \frac{D \cdot L_t}{N} - \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot c_o \cdot \hat{c}_s \cdot p \cdot (r_p - r_c)}{r_p \cdot c_{so} \cdot (\hat{c}_s \cdot p + c_{so})}}$$

Dal confronto tra lotto economico di acquisto e lotto economico di produzione è possibile ottenere informazioni in merito alla convenienza tra produrre internamente o decidere di far eseguire a terzi la produzione di uno o più beni. Questo tipo di decisione prendono il nome di “make or buy”. Decisioni di questo livello non si basano, però, esclusivamente su valutazioni di costo. Diversi sono i fattori che intervengono nella decisione finale di produrre in proprio o terziarizzare la produzione e non tutti sono facili da quantificare o addirittura non sono quantificabili. Alcuni dei fattori di interesse sono la disponibilità di capacità produttiva non utilizzata, la disponibilità di competenze interne, l’adeguatezza delle risorse disponibili, l’affidabilità dei fornitori, l’utilizzo di risorse alternative e il vantaggio economico. L’importanza dei diversi fattori in precedenza elencati dipende dal contesto applicativo e, nell’ambito dello stesso contesto può variare in base alla collocazione temporale.

Nel caso in cui si debba decidere la dimensione ottimale dei lotti di produzione quando vi sono presenti più di un prodotto, non è possibile ottenere un minimo della funzione costo semplicemente calcolando i lotti economici di ciascun prodotto per poi mandare in produzione la relativa quantità per ciascun prodotto. Si verificherà non infrequentemente che un siffatto dimensionamento dei lotti di produzione porti a soluzioni impossibili. Nel caso semplice di due prodotti, per esempio, i giorni consecutivi lasciati a disposizione tra il lancio di due produzioni consecutive del primo prodotto potrebbero non essere sufficienti per lanciare in produzione l’intera quantità ottimale del secondo. In questi casi si adottano altri criteri di dimensionamento che portare in genere a soluzioni di sub-ottimo. In genere si considera di fissare una volta per tutte la sequenza dei prodotti da lanciare in produzione basandosi sul criterio di riduzione dei costi di set-up e successivamente calcolare il numero lanci in produzione della sequenza così definita che rende minima la funzione di costo totale. In questo modo ogni volta che lancio una sequenza di produzione vengono lanciati in produzione tutti i prodotti e, per ogni sequenza, le quantità di ogni prodotto da inviare alla produzione saranno le stesse. Prima di determinare una sequenza minima è

comunque indispensabile calcolare il numero di giorni necessari per la produzione e verificare che non superi il numero di giorni resi disponibili per la produzione. Se quindi indichiamo con g_p i giorni disponibili per la produzione dovrà essere verificata la seguente relazione:

$$g_p \geq \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{r_{p,i}}$$

Nel caso in cui i giorni disponibili per la produzione non siano sufficienti, significa che la capacità produttiva dell'impianto non è sufficiente. Per questa ragione devono essere assunte decisioni in merito all'eventuale incremento di capacità produttiva interna, per la quale risulterà necessario un investimento in capitali per agire sulla parte tecnologica o una riorganizzazione del lavoro con l'impiego di straordinari o turni di lavoro, oppure ricorre all'aumento della componente esterna della capacità produttiva agendo sui contratti di sub-fornitura.

La funzione costo totale per il caso appena descritto assume la forma:

$$C_{tot} = \sum_{i=1}^n p_i \cdot D_i + m \cdot \sum_{i=1}^n c_{o,i} + \frac{1}{2 \cdot m} \sum_{i=1}^n D_i \cdot \hat{c}_{s,i} \cdot p_i \cdot \frac{r_{p,i} - r_{c,i}}{r_{p,i}}$$

$$m_{ott} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n D_i \cdot \hat{c}_{s,i} \cdot p_i \cdot \frac{r_{p,i} - r_{c,i}}{r_{p,i}}}{2 \cdot \sum_{i=1}^n c_{o,i}}}$$

per ognuno dei prodotti da inviare in produzione i lotti corrispondenti al minimo numero di lanci di sequenze uguali è quindi dato dal rapporto tra il valore della domanda di ogni singolo prodotto per un determinato periodo e il valore di sequenze ottimo per lo stesso periodo:

$$Q_i = \frac{D_i}{m_{ott}}$$

Il modello di lotto economico di produzione, così come presentato, non tiene conto del tempo di set-up. È opportuno tenere conto di questo fatto introducendo un tempo di slack sufficiente a far fronte ai reali tempi di set-up che non possono essere considerati nulli. Per considerare i tempi di set up all'interno delle sequenze e tra le diverse sequenze occorre che sia verificata la seguente disuguaglianza:

$$\frac{N}{m_{ott}} > \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_{p,i}}$$

Il tempo effettivamente disponibile per la produzione delle diverse sequenze diminuisce al crescere del numero di sequenze poiché, al contempo, aumenta il numero di riattrezzaggi e, conseguentemente, il tempo di set-up. Se, limitandoci ad un esempio relativo ad un solo prodotto, si considera un tempo di set-up necessario alla messa in produzione pari a $t_{su}=6$ giorni, siano $g_l=200$ i giorni disponibili in un anno per la produzione; $D=10000$ unità/anno la domanda prevista per il prodotto in esame; $r_c=D/g_l$ il tasso di consumo riferito ai giorni lavorativi; $r_p=100$ unità/giorno; $c_s=2$ €/unità·anno; $c_o=50$ €/ordine. Il numero ottimo di lotti da inviare in produzione risulta essere:

$$m_{ott} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10000}{2 \cdot 50} \cdot \frac{100 - 50}{100}} = 10$$

in corrispondenza del quale si ottiene un lotto economico di 1000 unità, un tempo necessario per la produzione paria a 100 giorni ed un tempo necessario per le operazioni di set-up pari a 60 giorni. Complessivamente le operazioni necessarie per la realizzare il prodotto risultano essere paria a 160 giorni, quindi è possibile realizzare la sequenza in virtù dei 200 giorni disponibili. Se pur rimanendo la domanda annua uguale fossero diversi i costi di ordinazione e di stoccaggio, in particolare pari a $c_s=4$ €/unità·anno; $c_o=25$ €/ordine, si otterrebbe $m_{ott}=20$. Conseguentemente il tempo necessario per le operazioni di set-up sarebbe pari a 120 giorni con un tempo necessario per il completamento delle operazioni di produzione pari a 220, ben superiore ai 200 giorni disponibili. Il problema della incompatibilità del tempo disponibile con il tempo necessario alla produzione si può verificare anche nel caso in cui vi sia un aumento della domanda prevista per effetto della quale si potrebbe avere una riduzione del numero di riattrezzaggi necessari ma un aumento di tempo necessario per le operazioni di produzione effettiva. In tale caso è possibile calcolare il valore di domanda che rende non possibile la produzione con 1 lotto economico di produzione. Tale valore della domanda viene definita *domanda critica*.

Analisi di Pareto

L'analisi di Pareto, anche nota come analisi ABC, è un metodo di classificazione che risulta efficace per evidenziare l'importanza relativa dei diversi elementi di un insieme osservati sotto un determinato aspetto. Spesso viene utilizzato per una classificazione economica di scorte, fornitori o clienti, ma può essere applicato con estremo successo per la valutazione della priorità di intervento sulla soluzione di cause di guasto negli interventi di manutenzione preventiva o per la ricerca di attività di riduzione dei tempi di set-up. Sotto il profilo economico le valutazioni possono essere mirate a diversi obiettivi quali la determinazione dei prodotti più redditizi di una gamma produttiva, di quelli che comportano oneri maggiori di mantenimento a scorta, la valutazione dell'importanza relativa di diversi clienti o fornitori, ecc..

L'analisi prevede, inizialmente, di fissare il parametro di confronto per l'analisi: tempi di fermata per l'utilizzo nei problemi di manutenzione; valore delle scorte nel caso di oneri di stoccaggio; fatturato nel caso di importanza relativa di clienti o prodotti. Indichiamo con F_i il valore del parametro per l'elemento i^{mo} . Ad ogni elemento viene associato il rispettivo valore del parametro di controllo. Gli elementi vengono poi ordinati per valori decrescenti del parametro utilizzato per la classificazione ottenendo una sequenza ordinata di valori F_j tali che $F_j > F_k \quad \forall j > k$. Il valore del parametro è quindi normalizzato rispetto al suo valore complessivo $f_j = \frac{F_j}{\sum_{j=1}^n F_j}$ e ne viene

calcolato il valore cumulato $\beta_j = \sum_{i=1}^j f_i$.

Si calcola poi il rapporto percentuale tra singolo prodotto e numero totale di prodotti $a_j = 1/n$, con n il numero di prodotti, determinando anche per questi il valore cumulato $\alpha_j = \sum_{i=1}^j a_i$. L'operazione non è banale in quanto, talvolta, si procede alla classificazione per famiglie di prodotti simili sotto il profilo merceologico o gruppi omogenei di clienti. Ciascuna famiglia o gruppo conterrà, solitamente, un numero diverso di prodotti comportando un valore di a_i diverso al variare di i .

È possibile a questo punto determinare quanti e quali sono i prodotti che contribuiscono a determinare prefissati intervalli di valore per il parametro utilizzato. Si fisseranno dei limiti per calcolare quali prodotti dovranno essere classificati come facenti parte della classe A, quali della classe B e quali della C. Solitamente, ma non obbligatoriamente, questi limiti vengono fissati in 80%, 90% e 100%, cosicché tutti i prodotti per i quali la cumulata relativa al valore del parametro di classificazione utilizzato risulta inferiore o uguale al primo limite vengono classificati come prodotti di classe A, quelli per i quali il valore cumulato è compreso tra il primo e il secondo, ad esclusione del primo limite, sono classificati di classe B, i rimanenti sono classificati di classe C. Spesso succede che l'80% del valore del parametro di confronto viene fornito dal 20% dei prodotti, cosicché questo tipo di analisi si trova anche indicata come analisi (80, 20).

In generale, comunque, si riscontra che una parte consistente del valore del parametro di confronto viene fornito da una limitata frazione di prodotti sul totale. Tanto minore è la frazione di prodotti che contribuiscono a determinare l'80% del valore del parametro di confronto, tanto più concentrato è il fenomeno.

Con riferimento all'analisi delle giacenze di un magazzino, dopo aver effettuato l'analisi di Pareto non si può concludere che per i prodotti compresi nella classe A occorre tenere scorte elevate in quantità, semmai il contrario. Infatti scorte elevate di questi prodotti permettono sì di ridurre il rischio di rotture di stock particolarmente onerose nel caso di prodotti che contribuiscono in maniera consistente alla formazione del fatturato, ma aumentano il costo della giacenza media e i costi ad essa connessi. Sarà invece vero che prodotti di classe A dovranno essere gestiti con maggiore cura e attenzione rispetto a prodotti di categorie inferiori. Per questi prodotti sarà quindi necessario tenere una contabilità di magazzino più accurata, verificando frequentemente il livello delle scorte per poter intervenire prontamente nel caso di variazioni della domanda. In questo caso sarà opportuno un modello di gestione delle scorte a livello o punto di riordino. Per prodotti, invece, di categoria C sarà possibile effettuare una gestione a intervallo di riordino raggruppando più prodotti in un unico ordine, ottenendo così ulteriori benefici dalla riduzione del costo di ordinazione.

Metodi euristici per la determinazione delle sequenze di produzione all'interno di gruppi o famiglie di prodotti.

Tra i metodi euristici utilizzati per la risoluzione dei problemi di emissione degli ordini di produzione all'interno di una famiglia di prodotti presentiamo il "run out time" (ROT) e il "run out time combinato" (AROT).

Il ROT è un semplice metodo col quale vengono assegnati come prioritari nel piano di produzione di un gruppo o famiglia quei prodotti per i quali si ha il rischio maggiore di esaurimento delle scorte. Il valore di ROT è calcolato con il rapporto tra il livello di inventario di un singolo prodotto all'inizio del periodo, di cui si vuole effettuare la programmazione, e la sua domanda nello stesso periodo.

Se indichiamo con S_i il livello di inventario del prodotto i^{mo} e con D_i la domanda prevista per il prodotto i^{mo} si avrà quindi:

$$ROT_i = \frac{S_i}{D_i}$$

Tra tutti i prodotti si sceglie di inviare alla produzione il prodotto che ha il minore valore del ROT. Può accadere, se i lotti di produzione sono stati determinati a priori per tutti i prodotti in base a criteri predefiniti, che l'assorbimento di capacità produttiva per realizzare la sequenza sia superiore a quella disponibile. A tale problema si può porre rimedio utilizzando il metodo del run out time combinato che procede a modificare la dimensione dei lotti di produzione per non incorrere nel problema di eccessivo utilizzo della capacità produttiva.

Il valore di AROT è dato dal rapporto tra la somma dell'inventario complessivo di tutti i prodotti, espresso in ore macchina, più le ore macchina disponibili durante il periodo di programmazione e le ore macchina totali previste nel periodo di programmazione per tutti i componenti la famiglia di prodotti da realizzare. Se t_i è il tempo macchina per la realizzazione di un'unità di prodotto i^{mo} e T il tempo macchina disponibile nel periodo considerato per la programmazione, si ha:

$$AROT = \frac{\sum_{i=1}^n S_i \cdot t_i + T}{\sum_{i=1}^n D_i \cdot t_i}$$

Il fabbisogno lordo di ogni item viene calcolato come prodotto tra il valore di AROT e la domanda nel periodo del relativo item:

$$Fl_i = AROT \cdot D_i$$

Il fabbisogno netto, cioè le quantità da inviare alla produzione, sarà la differenza tra il fabbisogno lordo e la scorta presente:

$$Fn_i = Fl_i - S_i$$

In questo modo il lotto di produzione viene aggiustato in modo che ogni prodotto esaurisca il proprio inventario esattamente in AROT periodi.

Modelli utilizzati per sistemi caratterizzati da domanda discreta

Ci sono sistemi in cui la variazione della domanda è così pronunciata che l'assunzione di assorbimento costante della domanda è seriamente violata. Questa situazione si verifica anche nel caso in cui la domanda sia prevedibile con certezza o deterministica ma l'andamento nel tempo non possa essere assimilato a quello tipico di domanda costante a dente di sega, sia per prodotti a domanda indipendente che, molto più frequentemente, per quelli a domanda dipendente, come si vedrà meglio in seguito. Si parla, in questi casi, di domanda discreta. Nonostante sia stato visto che i modelli basati sull'assunzione di domanda costante nel tempo siano robusti rispetto alle variabili in gioco, in taluni casi non è più possibile far riferimento ai suddetti modelli anche se la domanda è certa ma fortemente variabile da periodo a periodo.

I sistemi così caratterizzati sono definiti sistemi a domanda discreta. Per questi sistemi il problema è legato alla determinazione della dimensione del lotto di produzione. Il problema è tipicamente presente nella formulazione dei piani di produzione di prodotti a domanda dipendente, per i quali spesso vengono adottate tecniche MRP che vedremo in seguito.

Il sistema viene analizzato con riferimento ad un orizzonte di programmazione noto. La lunghezza dell'orizzonte di programmazione ha un effetto sulle decisioni in merito alla dimensione del lotto. Di conseguenza è sempre bene adottare tecniche di decisione della dimensione del lotto che non siano statiche, cioè basate su un orizzonte di programmazione definito a priori e non più modificabile, ma dinamiche, che tengano, quindi, conto di un orizzonte di programmazione che nel tempo si modifica. In quest'ottica vengono assunte le decisioni di quantificazione dei lotti per tutto l'orizzonte di programmazione, ma solo quelle più immediate vengono implementate. Le decisioni riferite ai periodi più distanti dell'orizzonte di programmazione vengono rimesse in discussione ogni volta che viene aggiunto un periodo all'orizzonte stesso. Sono stati realizzati diversi modelli euristici per la risoluzione di questo problema. Tali modelli si basano sulle seguenti ipotesi restrittive:

1. la domanda è nota e si verifica all'inizio di ogni periodo ma cambia da periodo a periodo;
2. l'orizzonte di programmazione è finito e composto da intervalli di uguale durata;
3. le dimensioni dei lotti devono includere la domanda di uno o più valori interi di periodo;
4. l'intera richiesta per ogni periodo deve essere disponibile all'inizio del periodo e tutti gli approvvigionamenti sono vincolati ad arrivare all'inizio del periodo;
5. non ci sono sconti per quantità ordinate sopra certi valori;
6. tutti i prodotti sono trattati indipendentemente dagli altri senza benefici dovuti a revisioni o approvvigionamenti per gruppi di prodotti;
7. tutto l'ordine viene consegnato in unica soluzione e non sono ammesse dilazioni nella consegna o stock out;
8. i prodotti richiesti per un certo periodo sono tolti dall'inventario all'inizio del periodo stesso per cui i costi relativi di mantenimento a scorta non gravano sul periodo in cui i prodotti vengono richiesti;
9. i costi di ordinazione, di stoccaggio ed il lead time sono noti e costanti nel tempo;

10. gli ordini richiesti all'inizio di un periodo sono evasi regolarmente (ipotesi di lead time nullo);
11. non vengono presi provvedimenti sulle scorte oltre il termine dell'orizzonte di programmazione;
12. il livello iniziale delle scorte è nullo.

Ordine lotto per lotto (LFL): è il metodo più semplice. Ogni articolo è ordinato, all'inizio di ogni periodo, nelle stesse quantità in cui è richiesto per quel periodo. Questo modello riduce a zero i costi di mantenimento a scorta, nelle ipotesi che abbiamo definito poc'anzi, ma non tiene in alcun conto del costo di emissione degli ordini. È adatto per articoli molto costosi o quando la domanda è molto discontinua, nel qual caso il controllo delle scorte è di fondamentale importanza. È adatto, inoltre, nel caso di produzioni continue ed elevati volumi di produzione, tipici delle linee di assemblaggio.

Quantità ordinate periodicamente (POQ): Si basa sul principio dell'ottimizzazione dell'intervallo di riordino sostituendo alla domanda nell'orizzonte di programmazione il suo valore medio con riferimento alla domanda nell'orizzonte di programmazione. Se n_p sono i periodi dell'orizzonte di programmazione risulta:

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n_p} D_i}{n_p}$$

L'intervallo ottimo si ottiene quindi dalla relazione:

$$T_{ott} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_o}{\bar{D} \cdot p \cdot \hat{c}_s}}$$

con significato dei simboli analogo a quanto definito nel modello di lotto economico di acquisto. Il valore così ottenuto deve essere arrotondato all'intero più vicino e deve essere comunque maggiore di zero. La dimensione del lotto è quindi pari alla domanda cumulata nel periodo ottimo. Gli ordini sono emessi solo per periodi con domanda

maggiore di zero. Se non c'è domanda per un periodo in cui si deve emettere un ordine, tale ordine viene spostato in avanti fino al primo periodo caratterizzato da una domanda positiva.

Algoritmo di Wagner - Whitin: è un procedimento iterativo, basato su tecniche di programmazione dinamica, che andiamo ad illustrare attraverso i passi che devono essere realizzati.

Al primo passo si calcola la matrice dei costi variabili per tutti i possibili ordini alternativi in un orizzonte di programmazione costituito da m periodi che assume la seguente formula:

$$Z_{i,j} = c_o + \hat{c}_{sp} \cdot p \cdot \sum_{k=i}^j (Q_{i,j} - Q_{i,k}) \quad 1 \leq i \leq j \leq m$$

dove c_o è il costo di ordinazione, $\hat{c}_{sp}$ è il costo di una lira messa a scorta per un periodo, p è il prezzo di acquisto, Q_{ij} è la somma del valore della domanda dei periodi compresi tra l' i^{mo} e il j^{mo} e D_k è la domanda nel periodo k .

Al secondo passo di iterazione si definisce una funzione f_j che, fissato nullo l'inventario alla fine del periodo j^{mo} , permette la determinazione del costo minimo possibile di programmazione degli ordini dal primo periodo al j^{mo} . Si parte fissando nullo il valore di f_0 e progressivamente, a partire dal primo periodo fino al j^{mo} , si calcolano i successivi valori con la seguente relazione:

$$f_j = \min_{i \in \{1, \dots, j\}} (Z_{i,j} + f_{i-1})$$

in altre parole, per ogni combinazione di ordini alternativi e supplementari sono comparate le strategie f_j , la migliore delle quali è registrata. Il valore di f_n rappresenta il costo della migliore programmazione degli ordini.

Il terzo passo consente di costruire la migliore programmazione degli ordini partendo dal valore della migliore soluzione ottenuta e definendo all'ordine di quali periodi si riferisce, per risalire fino al primo periodo nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
f_n &= Z_{w,n} + f_{w-1} \\
f_{w-1} &= Z_{v,w-1} + f_{v-1} \\
&\dots \\
f_{u-1} &= Z_{1,u-1} + f_0
\end{aligned}$$

Algoritmo di Silver - Meal: è un metodo iterativo che considera di calcolare un valore medio di periodo per il costo variabile che si dovrebbe sostenere nel caso in cui si dovesse emettere un ordine relativo ad un certo numero di periodi e che fissa un criterio di scelta per determinare il numero di periodi per i quali bisogna emettere l'ordine. Il valore medio si ottiene, a partire dal primo periodo, sommando i valori del costo di emissione di un ordine al costo di mantenimento a scorta delle quantità ordinate e dividendo questo valore per il numero di periodi considerati. Questo calcolo viene fatto aggiungendo di volta in volta un periodo. Ad ogni passo viene fatto un confronto con il valore ottenuto al passo precedente finché non si verifica che il valore di tale rapporto per un certo numero di periodi consecutivi è maggiore di quello ottenuto al passo precedente. Verificato questo si emette l'ordine per il numero di periodi per i quali questa disuguaglianza non è stata verificata e si riprende l'iterazione prendendo come primo periodo quello per il quale la disuguaglianza è stata verificata per la prima volta fino a che sono stati esauriti tutti i periodi dell'orizzonte di programmazione. Le relazioni sono le seguenti:

$$\frac{C_{v,T}}{T} = \frac{c_o + \hat{c}_{sp} \cdot p \cdot \sum_{i=1}^T (i-1) \cdot D_i}{T}$$

si emetterà l'ordine per i primi T periodi quando sarà verificata la seguente disuguaglianza:

$$\frac{C_{v,T+1}}{T+1} > \frac{C_{v,T}}{T}$$

oppure quando saranno stati esauriti i periodi di programmazione. A questo punto il periodo che dovrà essere indicato come primo periodo di programmazione sarà il $(T+1)^{mo}$. La dimensione del lotto sarà definita dalla cumulata della domanda nei T periodi selezionati:

$$Q = \sum_{i=1}^T D_i$$

L'algoritmo di Silver – Meal garantisce il raggiungimento di un minimo locale. È possibile, infatti, che la scelta di valori maggiori di T permettano di raggiungere costi minori. Il miglioramento è, generalmente, contenuto. Rispetto all'algoritmo ottimo di Wagner – Whitin la differenza è spesso contenuta entro l'1%. Se l'algoritmo è testato su un orizzonte di programmazione variabile, in diversi casi risulta migliore rispetto all'algoritmo di Wagner – Whitin.

Le situazioni in cui l'algoritmo non produce risultati validi sono riferite a riduzioni rapide della domanda in diversi periodi o alla presenza di un numero esteso di periodi con domanda nulla.

Algoritmo Parte - Periodo: si aggiunge ogni volta la domanda di un periodo e si calcola il valore corrispondente di immobilizzo a scorta relativo. Ci si fermerà o quando sono stati esauriti i periodi dell'intero orizzonte di programmazione o la prima volta che i costi di immobilizzo superano i costi di emissione di un ordine. Allora il lotto verrà dimensionato per una quantità pari al valore cumulato della domanda dei T periodi per i quali non è stata verificata la seguente disuguaglianza:

$$\frac{C_o}{C_h} \leq T$$

Modifiche all'algoritmo Parte – Periodo possono essere adottate per migliorare il modello. In particolare vengono effettuati confronti con ciò che accade aumentando il numero di periodi selezionati, tecniche che guardano avanti nel tempo, o riducendo il numero di periodi selezionati, tecniche che guardano nel passato. Inizialmente viene adottato il criterio di guardare ai periodi successivi e, solo se tale metodo non produce miglioramenti, viene applicato il metodo di guardare ai periodi precedenti.

L'applicazione dell'algoritmo Parte – Periodo ha condotto alla determinazione di emettere un ordine all'inizio del primo periodo per un numero di T periodi. Il successivo ordine verrebbe posto all'inizio del periodo $T+1$, che nel modello dovrà essere posto, una volta fissato il numero di periodi da accorpare per la definizione della dimensione del lotto, pari a 1. Se dovessimo decidere di spostare avanti di un periodo il numero di periodi da considerare nell'ordine che dobbiamo emettere, che

porta a considerare il lotto di dimensione pari alla cumulata della domanda per i primi $T+1$ periodi, il prossimo ordine verrà posto all'inizio del periodo $T+2$. Se accade che la domanda del periodo $T+2$ soddisfa alla seguente relazione:

$$D_{T+2} \geq T \cdot D_{T+1}$$

l'ordine comprenderà anche il periodo $T+1$ e verrà rivalutato il criterio di guardare ai periodi successivi fino a che la precedente relazione non verrà verificata. Si noti che la relazione suddetta equivale a mettere a confronto i costi di scorta che si avrebbero relativamente alla domanda del periodo $T+2$ per la situazione non modificata, con quelli che si avrebbero, relativamente alla domanda per il periodo $T+1$, aggregando la domanda di questo periodo all'ordine aperto. Se il metodo porta ad un miglioramento al termine della sua applicazione ci si ferma e si chiude l'ordine. Se alla prima applicazione del metodo non si ottiene alcun miglioramento, si passa all'applicazione del metodo che guarda ai periodi precedenti. Il metodo prevede di confrontare la domanda del periodo T con quella del periodo $T+1$ e spostare indietro di un periodo la domanda nel caso in cui si verifichi la seguente disuguaglianza:

$$D_T > 2 \cdot D_{T+1}$$

I metodi migliorativi portano a miglioramenti nel caso in cui la variazione della domanda subisca variazioni sensibili da periodo a periodo.

Algoritmo Parte – Periodo incrementale: l'algoritmo prevede di aumentare la dimensione di un lotto finché si verifica che i costi incrementali di stoccaggio sono minori o uguali ai costi di ordinazione:

$$(T-1) \cdot D_T \leq \frac{c_o}{\hat{c}_{sp} \cdot p}$$

Modifiche all'algoritmo Parte – Periodo

Modelli stocastici di gestione delle scorte

Fino a questo punto non è stato introdotto alcun fattore di incertezza nella determinazione dei modelli. Nella realtà, invece, diversi sono i fattori di incertezza che

si possono verificare. Tali fattori comportano variazioni, sia in termini di entità della domanda in un determinato periodo che in termini di durata del lead time, che non sono prevedibili a priori e di cui si può solo ipotizzare che si distribuiscano con determinate leggi probabilistiche. Per far fronte a queste incertezze senza incorrere in rotture di stock è necessario dotarsi di un livello di scorte, definite scorte di sicurezza, che mediamente rimarranno a scorta per tutto l'orizzonte di programmazione calcolato. La presenza delle scorte di sicurezza portano ad un incremento dei costi di giacenza dei beni e devono, quindi, essere dimensionate con cura. Per la loro determinazione si fissa il valore del livello di servizio, che definisce la probabilità che si ha di avere una rottura di stock in un certo periodo. Se quindi $f(x)$ è la funzione densità di probabilità relativa alla domanda in un determinato periodo di tempo, il livello di servizio è definito dalla seguente relazione:

$$L_s = \int_0^{S_0} f(x) \cdot dx$$

questo valore rappresenta la probabilità che la domanda nel periodo di riferimento non superi il valore S_0 . Solitamente si ritiene che la domanda in un periodo sia normalmente distribuita e che la domanda in un periodo non dipenda dalla domanda di un altro periodo. In queste condizioni la domanda di un periodo di una determinata durata può essere calcolata una volta nota la domanda di un periodo di durata diversa semplicemente applicando la legge dei grandi numeri.

Per la determinazione del livello di scorta di sicurezza occorre quindi individuare il periodo di tempo di riferimento in cui deve essere definita la domanda in termini di funzione densità di probabilità. Tale periodo di riferimento deve essere individuato considerando il periodo di tempo in cui si è nell'impossibilità di controllare con azioni mirate una variazione della domanda. Per il modello di gestione delle scorte a livello o punto di riordino bisogna considerare quindi la domanda nel lead time, mentre per il modello di gestione a intervallo fisso la domanda da considerare è quella nell'intervallo di tempo data dalla somma del lead time e dell'intervallo di riordino. Fissato il periodo di riferimento e note media e deviazione standard della domanda in un periodo generalmente di durata diversa da quello che si vuole esaminare, per le

considerazioni fatte sulla forma della funzione densità di probabilità della domanda e sull'indipendenza della domanda in periodi differenti di tempo, la domanda nel periodo in esame sarà anch'essa normalmente distribuita con media e deviazione standard date dalle seguenti relazioni:

$$m_p = M \cdot \frac{T}{T_p}$$

$$\sigma_p = \sigma \cdot \sqrt{\frac{T}{T_p}}$$

dove con m_p e σ_p sono state indicate rispettivamente la domanda media e la deviazione standard della domanda nel periodo di riferimento, mentre con m e σ quelle nel periodo in cui è nota la domanda, T è la durata dell'intervallo di tempo in cui la domanda è nota, infine, T_p è la durata dell'intervallo di riferimento che vale il lead time nel caso di punto di riordino e la somma del lead time e dell'intervallo di riordino nel caso di modello di riordino ad intervallo fisso. Una volta definiti i parametri è possibile determinare la scorta di sicurezza fissando a priori il livello di servizio desiderato dopodiché si determina il valore della funzione Normale standardizzata che corrisponde al livello di servizio fissato, infine, la scorta di sicurezza viene calcolata nel seguente modo:

$$S_s = z \cdot \sigma_p$$

avendo indicato con z il valore della variabile Normale standardizzata corrispondente al livello di servizio fissato.

Da un confronto tra la scorta di sicurezza calcolata per un prodotto nel caso di gestione a livello di riordino e nel caso di gestione a intervallo di riordino, si nota che il livello di scorta di sicurezza nel secondo caso risulta essere maggiore rispetto al primo.

La scorta di sicurezza può essere valutata anche in riferimento all'incertezza sulla durata del lead time. In questo caso con analogo ragionamento si arriva alla conclusione che la scorta di sicurezza deve essere calcolata nel seguente modo:

$$S_s = z \cdot D \cdot \sigma_{Lt}$$

avendo indicato con σ_{Lt} la deviazione standard della durata del lead time.

Nel caso, infine, si volesse considerare contemporaneamente la variabilità della domanda e del lead time, occorre considerare la variabile composta dal prodotto delle variabili stocastiche domanda e durata del lead time per cui si avrebbe un valore medio ed una deviazione standard fornite dalle seguenti relazioni:

$$\bar{X} = \bar{D} \cdot \bar{L}_t$$

$$\sigma = \sqrt{\bar{L}_t \cdot \sigma_D^2 + \bar{D}^2 \cdot \sigma_{L_t}^2}$$